

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

5

1 9 6 0

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

МАТЕМАТИКА, ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЕ,
ПРИЛОЖЕНИЯ И ИСТОРИЯ

8204

ВЫПУСК 5

ЛИТЕРАТУРА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
КОЛЛЕДЖА НМУ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

«Математическое просвещение»
выпускается при редакционном участии
И. Н. БРОНШТЕЙНА, А. М. ЛОПШИЦА, А. А. ЛЯПУНОВА,
А. И. МАРКУШЕВИЧА, И. М. ЯГЛОМА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, вып. 5.

Редактор *И. Н. Бронштейн.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *А. С. Бакулова.*

Слано в набор 4/VIII 1959 г. Подписано к печати 4/XII 1959 г. Бумага 60×92₁₆.
Физ. печ. л. 19,00 + 1 вкл. Условн. печ. л. 19,12. Уч.-изд. л. 21,02. Тираж 12000 экз. Т-11086.
Цена книги 6 руб. 35 коп. Заказ 3490.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Вазовая, 28.

**ПАМЯТИ
ЯКОВА СЕМЕНОВИЧА
ДУБНОВА**

**ЯКОВ СЕМЕНОВИЧ ДУБНОВ —
УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ЧЕЛОВЕК**

А. М. Лопишиц

(Москва)

Воспоминания о человеке, жизнь которого на протяжении многих лет протекала в тесном и плодотворном общении с его учениками, товарищами по работе и близкими друзьями, одновременно печальны и радостны. Горечь утраты соединяется с волнением, возникающим, когда воссоздаешь в своей памяти облик ушедшего дорогого человека, и с чувством продолжающегося с ним общения, которому ничто уже не может помешать.

Всё это рождает потребность поделиться своими чувствами с теми, которым дорого воспоминание об ушедшем, — отсюда и возникло желание рассказать о жизненном пути Якова Семеновича Дубнова читателям «Математического просвещения», многие из которых ощутили на себе влияние его деятельности — научной, педагогической и общественной.

Школа

Яков Семенович Дубнов родился 1 декабря 1887 г. Школьные годы Я. С. провел в Одессе, где он и окончил гимназию в 19-летнем возрасте. Этот сравнительно поздний (даже и по тогдашнему времени) срок завершения среднего образования имел среди своих причин и одну, немаловажную, общественного характера. Она состояла в тех ограничительных мерах, которыми реакционное царское правительство преграждало путь к образованию еврейскому юношеству; эти ограничения помешали Я. С. поступить в свое время в «казенную гимназию», т. е. в среднее учебное заведение, содержащееся на средства правительства («казны»).

Однако это обстоятельство сыграло в жизни Я. С. благоприятную роль: поступив в «частную гимназию», Я. С. встретился в ней с преподавателем математики, которого он не нашел бы ни в одной казенной одесской гимназии, — это был молодой доцент Новороссийского (Одесского) университета Вениамин Федорович Каган, хорошо известный теперь советской общественности как видный ученый и деятель

в области математики, в частности геометрии. В эти годы и зародилась духовная и научная дружба, которая соединила на всю жизнь учителя и ученика.

Пишущему эти строки посчастливилось и на самом себе испытать глубокое влияние, которое оказывало на учеников средней школы своеобразное и глубоко продуманное преподавание В. Ф. Кагана. Оно сочетало в себе высокий логический уровень изложения вместе с неустанной заботой о том, чтобы математическая абстракция вступала в связь с представлениями, уже накопленными школьниками. Это преподавание не только обогащало знаниями, не только создавало общее математическое развитие, но и воспитывало в тех, у кого зарождалось призвание педагога, понимание сущности процесса обучения математике.

Рассказывая о своих школьных годах, Я. С. любил вспоминать эпизод, который, по его словам, навсегда закрепился в его памяти. На одном из уроков математики В. Ф. Каган излагал теорию непрерывных дробей. Определив значение такой дроби как предел значений подходящих дробей и доказав, что этот предел существует, В. Ф. затем для иллюстрации вычислил значение

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

рез x и получив для нее уравнение $x = \frac{1}{1+x}$. Тогда Я. С., как он

сам рассказывал, робко спросил: «Вениамин Федорович, но вель вы в этом вычислении нигде не использовали определения значения непрерывной дроби?» В. Ф. улыбнулся и ответил: «А я думал, что ты этого не заметишь!» — и разъяснил связь употребленного приема с общим определением. Этот эпизод характеризует и ученика, и учителя. Иногда из педагогических соображений можно поступиться некоторыми деталями, но учитель должен быть готов честно ответить на поставленный вопрос, если он возникнет. «Обманывать нельзя» — это педагогическое убеждение Я. С. пронес через всю свою жизнь¹⁾.

Наблюдая в течение многих лет педагогическую деятельность и В. Ф. Кагана и Я. С. Дубнова, я снова и снова убеждался в том, что отборные семена легли в плодородную почву и что педагогические принципы ученика представляют собой оригинальное и обогащенное развитие педагогических идей учителя²⁾.

¹⁾ См. в его статье «К истории постулата о параллельных линиях в связи с практикой современного преподавания», стр. 67 настоящего выпуска.

²⁾ К этому выводу приводит и сравнение их литературно-педагогического наследия, — стоит хотя бы сравнить статьи В. Ф. Кагана, напечатанные в начале этого столетия в руководимом им журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики», со статьями Я. С. Дубнова, помещенными в выпусках «Математического просвещения».

Студенческие годы

Уже в средней школе выявились математические способности Я. С. В 1906 г. он поступил на физико-математический факультет Новороссийского университета. Здесь Я. С. подвергся влиянию высокого математического и педагогического дарования С. О. Шатуновского¹⁾. Его лекции по «Введению в анализ» упрочили интерес Я. С. к исследованию логических основ математики, возникший еще в средней школе под влиянием В. Ф. Кагана; этому способствовал и общий дух преподавания на физико-математическом факультете Новороссийского университета²⁾. Эти математические интересы Я. С. нашли некоторое свое завершение (для студенческого периода его занятий) в работе «Теория простых определенных интегралов, зависящих от параметра», написанной на соискание медали. За эту работу Я. С. получил серебряную медаль; золотую получил «соперник» Я. С., Григорий Михайлович Фихтенгольц. Дружественные и научные связи с этим своим студенческим сверстником Я. С. сохранил до конца жизни.

Год получения медали (1910 г.) был, однако, и годом... исключения Я. С. из университета: приняв участие в революционном движении студенчества, Я. С. был арестован во время «студенческих беспорядков» (так назывались на тогдашнем газетном языке студенческие волнения и забастовки). После тюремного заключения он был выслан из Одессы «без права проживания в университетских городах». И только в 1913 г., через три года, проведенных в провинции и заполненных столько же изучением математики, сколько и ее преподаванием (частные уроки — такова была педагогическая деятельность тех, кому царское правительство не доверяло вести преподавание в школах), Я. С. сдал в качестве «экстерна» государственные экзамены в Новороссийском университете и получил диплом. Но на следующий день он снова был выслан «в провинцию».



Я. С. Дубнов — студент.

¹⁾ Художественный портрет этого замечательного математика, который был «и в жизни и в математике... блестящим мыслителем, порой парадоксальным, но полным несокрушимой логики», дал Н. Г. Чеботарев в статье, посвященной памяти С. О. Шатуновского («Успехи матем. наук», вып. VII, 1940, стр. 316—321).

²⁾ Он сохранился и на ближайшее к этому периоду пятнадцатилетие; яркое описание этой научной обстановки (относящееся к первым годам после Октябрьской революции) дал в своей научной автобиографии Н. Г. Чеботарев («Успехи математических наук», т. III, вып. 4 (26) 1948).

И уже в поезде, в который его «заботливо» посадил полицейский, Я. С. пришел к решению: уничтожить свой паспорт, на котором был поставлен штамп о политической «неблагонадежности» (т. е. о запрещении проживать в университетских городах), и отправиться в Москву — учиться и работать.

Педагогическая деятельность в средней школе

Педагогическое дарование Я. С. развернулось в полной мере лишь после Октябрьской революции. Уже в 1918 г. он принимает участие (как консультант Отдела по реформе средней школы Наркомпроса) в перестройке преподавания математики. Но особенно его захватила практическая деятельность на «рабочем факультете», организованном при Московском университете; он вел ее до 1923 г. Здесь он решительно проводил педагогические идеи, оформившиеся на основе накопленного им опыта работы в средней школе. Одна из них — борьба с архаичностью преподавания; и в последующие годы Я. С. всегда требовал исключения из программы всех тех вопросов, которые не представляют интереса ни для общего образования, ни для подготовки к восприятию идей современной математики и сохраняются в программе только «по традиции». В то же время он отстаивал необходимость введения в среднюю школу элементов высшей математики. Не случайно, когда в 1933 г. встал вопрос о включении в курс средней школы сведений по высшей математике, Я. С. сразу откликнулся на призыв дать школе необходимые пособия и написал для нее учебник аналитической геометрии [72]¹⁾. За прошедшие годы эта книга не утратила актуальности; второе ее издание вышло в 1959 г.²⁾.

Другая идея — необходимость полной логической ясности изложения и вытекающая отсюда необходимость разумного ограничения объема преподаваемого материала, диктуемая либо возрастными особенностями учащегося, либо сроками прохождения программы. Много лет спустя, в 1946 г., приняв участие в работе Института методов обучения Академии педагогических наук, Я. С. осуществляет свою идею в области, в которой это ему представляется особенно необходимым — преподавания начал геометрии в школе первой ступени³⁾. По написанному Я. С. учебному материалу в некоторых школах Москвы проводился опыт обучения.

Эта работа не была им продолжена и не привела, к сожалению, к появлению нового учебного руководства. Однако идеи Я. С. нашли свое отражение в работах Сектора методики математики Института

¹⁾ Цифры в квадратных скобках указывают на литературу, приведенную в конце настоящей статьи.

²⁾ Борьба Я. С. за введение в школу элементов высшей математики нашла свое отражение в статьях [66] и [68]; последняя печатается по рукописи в настоящем выпуске «Математического просвещения» (стр. 17—57).

³⁾ См. его статью [57].

методов обучения, и их влияние теперь проявилось в некоторой мере в недавно вышедшем учебнике геометрии для VI и VII классов.

После 1923 г. Я. С. почти не возвращался к практическому преподаванию в средней школе, но уже не прекращал до конца своей жизни энергичной работы по всем вопросам, связанным с жизнью советской средней школы. Это была общественная работа в самом настоящем смысле этого слова. Никогда не отказываясь выполнять ответственные поручения Народного комиссариата по просвещению, впоследствии — Министерства просвещения РСФСР (в последние годы своей жизни он был членом Учебно-методического совета Министерства), Я. С. принимал деятельное и руководящее участие в работах общественных организаций, связанных с жизнью советской школы. Так, например, со дня организации Секции средней школы Московского математического общества Я. С. активно включился в ее работу¹⁾.

В неменьшей мере проявилась глубокая заинтересованность Я. С. в судьбах школы в его индивидуальных выступлениях, устных и литературных. Учителям Москвы хорошо известны его многочисленные выступления, безукоризненные по форме, спокойные по изложению, но всегда полемические по содержанию, ибо неизменной целью Я. С. была борьба за лучшие формы преподавания. Этому же были посвящены его литературные выступления, и в них мы находим не только суровую критику традиционных, отживших свой срок методов, но и отчетливо сформулированные предложения, указывающие новые пути²⁾.

Учителям математики (а не только школьникам) адресована небольшая книжка Я. С. — «Ошибки в геометрических доказательствах» [73]. По своему содержанию она близка к сборникам математических софизмов³⁾, но как далека она по духу от этих сборников! Цель Я. С. состоит совсем не в том, чтобы позабавить читателя, он хочет научить его думать, а педагога — и научить преподавать⁴⁾.

Учителям и студентам педагогических институтов должна была быть адресована книга Я. С. «Длина, площадь, объем» [75], которую он обдумывал ряд лет. Внезапная смерть 13 декабря 1957 г. прервала его работу — Я. С. успел написать только первую ее часть. Но и в этом незавершенном виде книга была бы очень интересна и полезна педагогу. Предисловие к этой книге Я. С. начинается следующими словами:

«Приступая к привлекательной для автора задаче — беседовать с настоящим или будущим педагогом о важных вопросах преподавания, я поставил себе за правило: не „вещать“ с неких научных или методических высот, а именно беседовать. Поэтому я не останавливался перед некоторыми длиннотами и отступлениями в сторону, если мне казалось, что они могут быть полезны моему собеседнику. Конечно, основной

¹⁾ Деятельность Я. С. в секции средней школы освещена на стр. 212—214 настоящего выпуска «Математического просвещения».

²⁾ См., например, его статьи в «Математическом просвещении» [64] и [67].

³⁾ Ср., напр., книжку Литцма и Трир, Где ошибка?, М., 1932.

⁴⁾ Ср. также использование популярного софизма в методической статье [57].

канвой служит тема, указанная в заглавии. Однако, вокруг нее вырастает множество сопоставлений и аналогий, от рассмотрения которых я не считал нужным отказываться. Менее всего меня соблазняла перспектива — прибавить ко многим превосходным изложениям предмета (вспомним хотя бы книгу А. Лебега «Об измерении величин») еще одно, пусть даже вполне корректное, но ограниченное узкими рамками темы...

В последние годы своей жизни Я. С. с большим увлечением отдавал свое время редактированию «Математического просвещения». Он был одним из инициаторов издания этих сборников и считал своей жизненной задачей всеми силами способствовать превращению их в орудие пропаганды современных методов преподавания, а также и популяризации идей современной математики в широких кругах преподавателей, студентов и других ревнителей математики¹⁾.

В настоящем сборнике «Математического просвещения» помещены работы Я. С. (частью уже напечатанные, частью из его литературного наследства), в которых проявляются свойственные ему черты вдумчивого педагога и активного общественного деятеля, а также статьи, в которых обсуждаются некоторые основные труды Я. С. Здесь же помещены статьи, относящиеся к вопросам обоснования математики — вопросам, выяснение которых для широкого круга учителей Я. С. считал первостепенно важным. Весь этот материал, посвященный памяти Я. С., поможет, быть может, сделать более цельным и ясным облик ушедшего от нас талантливого педагога и деятельного труженика в области народного просвещения.

¹⁾ Среди бумаг Я. С. сохранился листок с перечнем названий 14 (!) статей, которые Я. С. собирался написать для «Математического просвещения». Вот этот перечень:

«1. Единный метод для решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней ($3/4 - 1$ л. [лист]. [Сохранился черновик этой статьи; основная ее идея совпадает со статьей А. К. Харадзе, помещенной на стр. 204—206 настоящего выпуска. *Ред.*]

2. Изобарный определитель и его применение (2—3 л.).

3. Линейное дифф. ур-ние с постоянными коэффициентами ($1/2 - 3/4$ л.).

4. Первый этап в шк. курсе стереометрии ($1 - 1\frac{1}{2}$ л.).

5. Об одном принципе перехода от тригонометрии к квадригонометрии ($3/4 - 1$ л.).

6. Мысли о содержании курса (месте) математики в средней школе (в дискус. пор.) ($1/2$ л.).

7. Производная или дифференциал? ($1/2 - 3/4$ л.).

8. Тригонометрия в курсе ср. школы (напечатано в «Математическом просвещении» [64]. — *Ред.*)

9. Педагогические взгляды Э. Бореля (с воспроизведением его речи из «Вести», №№ 623—624, 1914 г.) ($3/4 - 1$ л.) [напечатано только предисловие к речи Бореля в «Математическом просвещении» [66]. — *Ред.*]

10. О формулировке признаков равенства Δ -ков ($1/4 - 1/3$ л.).

11. Вариант модели Ф. Клейна для плоскости Н. Лобачевского.

12. Основные понятия тензорного исчисления (из статей для БСЭ).

13. О ∇ -алгорифме.

14. О некоторых задачах интегральной геометрии (меры множеств прямых, гиперплоскостей и т. д.).»

Высшая школа

Преподавание в высшей школе Я. С. начал в 1921 г. чтением лекций по общему курсу высшей математики в Московском электротехническом институте связи, впоследствии слитом с электротехническим факультетом МВТУ, на котором Я. С. вел преподавание до 1940 г. ¹⁾.

В этот период он принял участие, — со всей активностью, присущей ему в тех случаях, когда речь шла о вопросах общественно-педагогического значения, — в борьбе за внедрение векторных методов в преподавании высшей математики для будущих инженеров. Математикам молодого поколения, воспитанным на идеях современной линейной алгебры, трудно представить себе то противодействие, которое проявляло основное ядро преподавателей высшей технической школы в вопросах о включении в программу математики элементарных правил векторной алгебры и их приложений к простейшим задачам аналитической геометрии ²⁾. Острота вопроса усугублялась тем обстоятельством, что даже и в университетском преподавании того времени векторная алгебра не нашла своего теперешнего места, и поэтому Я. С. пришлось уже в своем преподавании во Втором московском государственном университете (ныне Педагогический институт им. В. И. Ленина) с 1923 по 1937 г. быть одним из пионеров преподавания аналитической, а затем и дифференциальной геометрии с существенным использованием аппарата векторного исчисления.

Результатом этой работы явилось появление в свет в 1934 г. хорошо известной теперь книги Я. С. «Основы векторного исчисления» (часть первая) [71] ³⁾.

Почти незамеченным, однако, осталось оригинальное построение курса дифференциальной геометрии на плоскости; оно сохранилось в записи, сделанной слушателями Я. С. и изданной небольшим тиражом ⁴⁾.

В 1928 г. началась многолетняя деятельность Я. С. в Первом московском государственном университете — (ныне — МГУ им. М. В. Ломоносова)

¹⁾ В процессе этого преподавания Я. С. составил широко известный сборник задач и упражнений по дифференциальному исчислению [70], обладающий высокими педагогическими достоинствами. Он выдержал 10 изданий.

²⁾ Стоит только вспомнить, что даже академик А. Н. Крылов, непререкаемый авторитет и в вопросах организации учебного процесса в высшей технической школе, в специально прочитанной речи решительно предостерегал от использования векторного аппарата, в котором он видел (вместе с знаменитым В. Томсоном, которого он цитировал) только экономию мела (вместо трех уравнений — одно), сопровождаемую чрезмерной нагрузкой мысли. Правда, уже в работе, появившейся в 1935 г., высказывается совсем иная точка зрения А. Н. Крылова на роль, которую играет векторное исчисление (см. А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков, *Общая теория гироскопов*, стр. 275—276, 1932).

³⁾ Четвертое издание этой книги вышло в 1954 г. (см. рецензию Н. В. Ефимова на стр. 293—297 настоящего выпуска).

⁴⁾ П. С. Моденов и Г. Л. Невяжский, *Теория кривых в векторном изложении* (Ученые записки физ.-мат. ф-та МГПИ им. А. С. Бубнова, вып. 2, 1938, стр. 51—229). В предисловии указано, что текст составлен по лекциям Я. С. Дубнова.

сначала в должности преподавателя, а с 1931 г. — профессора кафедры дифференциальной геометрии и действительного члена Научно-исследовательского института математики и механики МГУ. Эта деятельность предоставила Я. С. возможность использовать свой педагогический талант для воспитания будущих математиков. Многие его слушатели, привлеченные им еще на студенческой скамье к самостоятельной научной работе в области дифференциальной геометрии, продолжали под его руководством — уже как аспиранты института — свою подготовку к научной деятельности и, защитив диссертации, становились в строй растущей армии работников советской высшей школы. Теперь они продолжают дело своего учителя в различных университетах и педагогических институтах нашей страны, возглавляя кафедры геометрии или принимая участие в их работе.

Характерной чертой преподавания Я. С. в стенах Московского университета являлась его постоянная приверженность к высокому логическому уровню изложения — в этом он продолжал линию, которой держались его учителя В. Ф. Каган и С. О. Шатуновский.

Вместе с этим его никогда не оставляло чувство необходимости полного контакта с аудиторией, и лекции Я. С. всегда привлекали студентов не только их научными качествами, но и доступностью формы изложения. Неудивительно поэтому, что когда в учебный план математического отделения МГУ был включен курс методики элементарной математики, его поручили Я. С. — и не только потому, что он был известен своей эрудицией и живым интересом к вопросам теории преподавания, но и потому, что практика его личной работы создавала образцы, на которых молодому поколению будущих педагогов можно было выучиться профессиональному мастерству.

Курсы, которые вел Я. С. в университете, многочисленны и разнообразны. Он был одним из первых, кто взял на себя чтение курса «Векторный и тензорный анализ». Здесь Я. С. использовал в большой мере плоды собственных исследований — все это нашло отражение в изданной в 1952 г. книге Я. С. «Основы векторного исчисления» (часть вторая), которая представляет собой не столько учебное руководство, сколько оригинальную монографию [74]¹⁾.

Не менее своеобразными по построению были курсы «Дифференциальная геометрия» и «Теория поверхностей». К сожалению, Я. С. не издал этих курсов. Многие из его друзей по науке и учеников хорошо знали многочисленные тетради, убористо написанные бисерным отчетливым почерком (так гармонирующим с отчетливостью изложения, присущей Я. С.), в которых в литературно законченной форме содержалась значительная и наиболее оригинальная часть материала, излагаемого Я. С. на лекциях. Высокая требовательность, которую проявлял Я. С. к качеству учебной литературы, заставляла Я. С. про-

¹⁾ Рецензия П. К. Рашевского на эту книгу помещена на стр. 298—302 настоящего выпуска.

должать работу над этими рукописями, так и не увидевшими свет. К счастью, некоторая, увы, небольшая часть этого материала была использована, с согласия Я. С., его старшим товарищем В. Ф. Каганом, возглавлявшим кафедру дифференциальной геометрии в МГУ, в качестве материала, включенного в хорошо известный теперь двухтомный курс В. Ф. Кагана «Теория поверхностей».

Свою работу в стенах Московского университета Я. С. продолжал почти 25 лет. В течение этого периода установились и упрочились глубокие деловые и дружеские связи Я. С. со многими представителями коллектива преподавателей механико-математического факультета. Они поддерживались не только его качествами ученого и педагога, но и тем уважением, которое вызывали его справедливое и благожелательное отношение к людям и высокая принципиальность его мнений и поступков.

В последовавшей за этим (1952—1955 гг.) работе Я. С. в качестве профессора, заведующего кафедрой математики Педагогического института в Сыктывкаре (Коми АССР), Я. С. продолжал в новых для него условиях вести преподавание и работу с той же энергией и тем же энтузиазмом, который был ему свойствен в течение всей его почти сорокалетней педагогической деятельности.

Научная деятельность

Раннему развитию научно-исследовательских способностей Я. С. помешали условия, характерные для дооктябрьского периода жизни русской высшей школы. Как и многие другие юноши с несомненным научным дарованием, Я. С. не был оставлен при университете для продолжения научных занятий только потому, что еще на студенческой скамье он стал в оппозицию к режиму царского правительства, подавлявшего силы русского общества. С несомненностью можно сказать, что Я. С. принадлежит к тому широкому слою ученых старого поколения, которым только Советская власть дала возможность выявить свои научные дарования и использовать их для нужд общества.

Только в 1924 г., уже имея опыт ответственного преподавания в советской высшей школе, Я. С. возвращается к систематической научной учебе как аспирант Научно-исследовательского института математики и механики при МГУ, выбрав себе в качестве специальности дифференциальную геометрию, а руководителем — своего старого учителя еще по Новороссийскому университету В. Ф. Кагана.

Не могу не сказать о том чувстве удивленного восхищения и глубокого уважения, которое вызывало у меня, начавшего свою аспирантскую учебу рядом с Я. С., его настойчивость и увлеченность научными занятиями. Десятилетняя возрастная грань, разделявшая

нас, нисколько не мешала нашему научному, а вместе с тем и дружескому общению. Уже тогда возникшая традиция выяснять с ним, часто в ожесточенных многочасовых спорах, основные вопросы занимавших нас научных проблем, пролила через всю нашу жизнь; теперь, лишившись этого, я ничем не могу восполнить потерю.

Последующая научная деятельность Я. С. тесно связалась с судьбой семинара по векторному и тензорному анализу, который был организован при МГУ В. Ф. Каганом в 1927 г. Вместе с другими, более молодыми учениками В. Ф. Кагана, Я. С. принял активное участие в формировании этого научного содружества, доброжелательно и уважительно относясь к талантливой молодежи, которая вскоре была вовлечена в работу семинара. Здесь Я. С. делал многочисленные доклады о своих научных исследованиях, упорно защищая свои взгляды (особенно вспоминаю дискуссии, в которых Я. С. отстаивал свое недоверие к символическому «набла-исчислению» и свои взгляды на понятия тензора и функции); сюда же он привлек своих учеников (и впоследствии и их учеников). В этой работе окончательно оформился облик советского ученого, давшего стране много первоклассных работ по вопросам линейной алгебры, тензорного исчисления, многомерной дифференциальной геометрии. Я не могу здесь остановиться на обсуждении даже важнейших работ Я. С. — это будет сделано в посвященной его памяти статье, которая появится в ближайшем выпуске «Трудов семинара»¹⁾ — общее представление о них дает уже самый список напечатанных при его жизни трудов, который, однако, совсем не исчерпывает выполненной им научной работы: присущая Я. С. скромность и высокая требовательность привели к тому, что многое, услышанное его научными друзьями и его учениками, осталось неопубликованным.

Педагогическая и научная деятельность Я. С. неотделима от его человеческого облика — в этой деятельности отражаются все его душевные качества. Поэтому я не решаюсь своими собственными оценками дополнять образ замечательного человека, деятельность которого прошла на глазах у советской математической общественности.

Не могу только не упомянуть о присущем ему драгоценном качестве — его скромности. Она проявлялась в критическом отношении к своим собственным достижениям и поступкам. Он никогда не выдвигал себя на первое место, всегда противился внешнему признанию своих достижений — даже не позволил своим научным друзьям поздравить его с семидесятилетием на очередном собрании семинара, в создании и жизни которого он принял решающее участие.

Но в памяти людей, знавших его, он занимает высокое, ему принадлежащее место.

¹⁾ Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. XI (печатается).

СПИСОК РАБОТ Я. С. ДУБНОВА

А. Научные работы¹⁾

1927

1. О симметрично двоянных ортогональных матрицах, в кн. В. Ф. Кагана «О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцовы преобразования» (ч. 2 и 3), изд. Ассоциации н.-и. ин-тов 1 МГУ, М., стр. 33—55.
2. О совместных инвариантах системы аффиноров, Труды Всеросс. съезда математиков в Москве, М.—Л., Госиздат, стр. 236—237.
3. О тензорах с векторными компонентами, там же, стр. 190—192.

1929

4. О соотношении между кривизнами линии, лежащей на данной гиперповерхности, Математический сборник 36, вып. 3—4, стр. 417—423.

1931

5. Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и сетей (на франц. яз.), C. R. Acad. Sci., Paris 192, № 5, стр. 251—264.
6. Основные тензоры прямолинейной конгруэнции (на франц. яз.), там же, № 7, стр. 399—401.

1933

7. О циклическом аффиноре, Уч. записки Моск. ун-та, 1, стр. 16—17.
8. О тензорах с нескаларными компонентами (на нем. яз.), Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. I, стр. 196—222.
9. Дифференциальная геометрия прямолинейных конгруэнций в тензорном изложении (на нем. яз.), там же, стр. 223—303.
10. Геометрические свойства экстремалей некоторых вариационных задач, там же, стр. 8.
11. О тензорах с единственной дивергенцией (на франц. яз.), Rendiconti Acad. d. Lincei 17, № 7, стр. 507—508.

1934

12. О матрицах Дирака, Уч. записки Моск. ун-та, 2, стр. 43—48.

1935

13. К дифференциальной геометрии сетей (теоремы приведения; геодезические сети) (на русск. и франц. яз.), Доклады АН СССР 4, № 1—2, стр. 7—10.
14. Ковариантное интегрирование в римановых пространствах двух и трех измерений (на франц. яз.), Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. II—III, стр. 174—199.
15. Обобщение уравнения Гамильтона—Кэли и совместные инварианты нескольких аффиноров (на франц. яз.), там же, стр. 351—367.

1936

16. О парах и пучках сетей (совм. с Н. В. Ефимовым), Доклады АН СССР, 4, № 2, стр. 43—46.

¹⁾ В список включены напечатанные в «Трудах семинара по векторному и тензорному анализу» резюме докладов Я. С. на семинаре, содержащие достаточно развернутое содержание результатов.

17. Тензорные признаки некоторых поверхностей и сетей; в кн. «Труды 2-го всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24—30 июня 1934 г.», т. 2, Секционные доклады, Л.—М., изд. АН СССР, стр. 113—114.

1937

18. Об особенных геодезических сетях и поверхностях Ли (совм. с Н. В. Ефимовым, на русск. и франц. яз.), Доклады АН СССР 15, № 8, стр. 415—416.

19. Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и принадлежащих им сетей (на франц. яз.), Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. IV, стр. 197—202.

20. О тройках попарно сопряженных сетей, там же, стр. 13.

21. О преобразовании чебышевского тензора при изменении аффинной связности, там же, стр. 15.

1939

22. К теории шаровых конгруенций (совм. с М. А. Сабировым, на русск. и франц. яз.), Доклады АН СССР 22, № 8, стр. 478—480.

1940

23. О пространственных аналогах чебышевской сети (совм. с С. А. Фуксом), Доклады АН СССР 28, № 2, стр. 102—104.

1941

24. Полная система инвариантов двух аффиноров в центроаффинном пространстве двух и трех измерений, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. V, стр. 250—270.

25. Интегральные инварианты Картана в пространстве гиперплоскостей, там же, стр. 6.

26. Об одном обобщении сферического отображения, там же, стр. 9.

27. О двух обобщениях сети Чебышева, там же, стр. 9—10.

28. Геометрическое значение тензора Чебышева, там же, стр. 10.

29. О тензорах инвариантно связанных с сетью, там же, стр. 13—14.

30. О метриках, порождаемых данной сетью, там же, стр. 16.

1943

31. О понижении степени аффинных полиномов (совм. с В. К. Ивановым), Доклады АН СССР 41, № 3, стр. 99—102.

1945

32. Основные тензоры в метрической теории шаровых конгруенций (совм. с М. А. Сабировым), Доклады АН СССР 49, № 9, стр. 639—641.

1946

33. Сети равных путей на поверхности, Уч. записки Моск. ун-та, вып. 100, Математика, т. 1, стр. 212—216.

1949

34. Сети равных площадей, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. VI, стр. 16.

35. Об одной геометрической интерпретации уравнений Кодацци, там же, стр. 17.

36. Поле дублетов на поверхности, там же, стр. 18.

37. О некоторых системах линейных тензорных уравнений в бинарной области, там же, стр. 19.

38. О кривизне бинарных форм, встречающихся в теории поверхностей, там же, стр. 19—20.
39. О изгибании с сохранением главных кривизн, там же, стр. 20.
40. О некоторых многоточечных тензорах в аффинной теории кривых, там же, стр. 22—23.
41. Тензоры и геометрические объекты в одномерном пространстве, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. VII, стр. 3.
42. Алгебра девиаторов и ее приложения к теории сетей, там же, стр. 4.
43. О моделях гиперболической геометрии, там же, стр. 5.
44. Центроаффинная геометрия кривых и поверхностей, там же, стр. 9.
45. Дифференциальная геометрия многообразий уровня, там же, стр. 14.

1950

46. Центроаффинная геометрия кривых на плоскости, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. VIII, стр. 106—127.
47. Центроаффинная теория поверхностей (совм. с В. Н. Скрыдловым), там же, стр. 128—143.
48. Дифференциально-геометрические свойства траекторий в позиционном поле, там же, стр. 3—4.
49. Дифференциально-геометрические объекты и системы импримитивности, там же, стр. 9.

1951

50. Прямолинейная конгруенция аффинного градиента, Доклады АН СССР, 81, № 3, стр. 349—352.

1952

51. Диагональные свойства сетей. Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. IX, стр. 7—48.

1954

52. По поводу уравнений Петерсона, УМН 9, № 1, стр. 101—106.

1955

53. Теория полутензоров сети, Уч. записки Казанского гос. ун-та, 115, кн. 10, стр. 16—17.

1958

54. Полутензоры двумерной сети, Известия высш. уч. зав., Математика, № 4, стр. 74—83.

55. Модель евклидовой плоскости на гиперболической. Будет напечатано в следующем выпуске «Математического просвещения».

Б. Статьи методического содержания, рецензии, энциклопедические статьи и др.

56. О разложении на множители некоторых тригонометрических выражений, Сборник «Вопросы математики и ее преподавания» под ред. Н. И. Чистякова и К. М. Соловьева, М.—Пгг, стр. 41—67 (год издания не указан).
57. Геометрия в семилетней школе, Изв. Акад. пед. наук РСФСР, 1946, вып. 6, стр. 57—76.
58. О новых книгах по геометрии, «Математика в школе», 1946, М.

59. В. Ф. Каган, Краткий обзор научной биографии (к 80-летию со дня рождения), (совм. с П. К. Рашевским), Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. VII, 1949, стр. 16—30.

60. К истории постулата о параллельности в связи с практикой современного преподавания, «Математика в школе», № 5, стр. 1—8, воспроизводится в настоящем выпуске «Математического просвещения», стр. 57—71.

61. Объем, БСЭ, 1954, 2-е изд., т. 30, стр. 443.

62. Сети линий, БСЭ, 1955, 2-е изд., т. 33, стр. 614.

63. Вениамин Федорович Каган (некролог, совм. с А. М. Лопшицом, Труды семинара по вект. и тенз. анализу, вып. X, 1956, стр. 3—14.

64. Тригонометрия в школьном курсе геометрии, «Математическое просвещение», вып. 1, 1957, стр. 45—56.

65. Ньюэлл, Векторный анализ (рецензия), Новые книги за рубежом, серия А, № 9, 1957, стр. 15—19.

66. К статье Э. Бореля «Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки», «Математическое просвещение», вып. 3, 1958, стр. 89—91.

67. К проблеме создания учебников по математике для средней школы, там же, стр. 275—300.

68. Содержание и методы преподавания элементов математического анализа и аналитической геометрии в средней школе, печатается в наст. выпуске «Математического просвещения», стр. 17—55.

69. О двух учебниках алгебры для средней школы (рецензия), там же, стр. 275—292.

В. Книги

70. Задачи и упражнения по дифференциальному исчислению, вышло 10 изданий.

71. Основы векторного исчисления, ч. 1 (векторная алгебра, элементы векторного анализа), 1933, вышло 4 издания.

72. Введение в аналитическую геометрию, М., Учпедгиз, 1934, 101 стр.; 2-е изд., Физматгиз, 1959.

73. Ошибки в геометрических доказательствах, М., Гостехиздат, 1953, вышло 2 изд., переведена на языки — китайский, чешский, немецкий, румынский.

74. Основы векторного исчисления, ч. 2 [линейные функции вектора, векторный анализ (теория полей), начала тензорного исчисления], М., Гостехиздат, 1952, 415 стр.

75. Длина, площадь, объем (рукопись, не закончено).

76. Введение в методы дифференциальной геометрии (рукопись).

1. ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ

СОДЕРЖАНИЕ И МЕТОДЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ ¹⁾

Я. С. Дубнов

(Москва)

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Начала высшей математики как элемент общего образования.

В истории математики нет эпохи, которая могла бы сравниться по своему решающему значению с XVII—XVIII вв. н. э. В этот именно период сложились в основных чертах аналитическая геометрия и анализ бесконечно малых (дифференциальное и интегральное исчисление) — фундамент не только современной математики, но и всего точного естествознания: механики, астрономии, физики, а с ними и инженерных наук. С последним обстоятельством сразу столкнется окончивший нашу среднюю школу, когда откроет научную книгу, относящуюся к одной из только что названных областей: он найдет там много математики, но большей частью не той, которой его обучали. Именно в результате такого положения высшая школа вынуждена откладывать преподавание механики и физики до того момента, когда студенты 1-го курса овладеют элементами аналитической геометрии и анализа, т. е. математики XVII—XVIII вв.

Общезвестна та историческая обстановка, в которой происходил отмеченный расцвет математической науки. Закат феодализма и зарождение фабричного производства, открытие заморских земель и возникновение колониальной системы, возрастающее значение военной техники — таковы были предпосылки небывалого подъема точных наук в ту эпоху. Одни только нужды дальнего мореплавания и судостроения предъявляли требования одновременно к астрономии, механике, физике. Старая греческая математика с ее геометрией неподвижных «классических» фигур и арифметикой целых чисел, даже пройдя

¹⁾ Написание этой неопубликованной статьи Я. С. Дубнова относится примерно к 1948—1952 гг. Она сохранила свою актуальность и в настоящее время, в особенности в связи с проводимым теперь обсуждением программ и методов преподавания математики в средней школе. (Прим. ред.)

в средние века через освежающее влияние Востока (индусы и арабы), не могла служить опорой для изучения непрерывных процессов («движения» в широком смысле слова), протекающих в сплошной материальной среде. Основные физические понятия — «скорость» и «плотность», в результате математической абстракции создали дифференциальное исчисление¹⁾, в то время как «длина пути» и «масса» породили интегральное исчисление. Как это всегда бывает в истории науки, творцы анализа бесконечно малых Ньютон и Лейбниц, конечно, имели предшественников: идею интегрирования в применении к частным задачам можно найти у Архимеда (III в. до н. э.), в еще более явном виде — у Кеплера и Кавальери (первая половина XVII в.). Однако лишь в конце XVII и начале XVIII вв. был обнаружен всеобъемлющий характер этих идей и стала очевидной их решающая роль в точных науках (ньютонова теория тяготения, механика Эйлера).

Несколько раньше произошел переворот в методологии математики, без которого были бы невозможны дальнейшие ее успехи. Мы имеем в виду создание в первой половине XVII в. аналитической геометрии, связанной с именами Декарта и Ферма. Древние ревниво оберегали геометрию от вторжения арифметики (позднее — алгебры, которая в XVII в. называлась «общей арифметикой»). Это догматическое разделение хотя и покоилось на некоторых научных мотивах²⁾, однако было реакционным и надолго задержало развитие науки. Декарт перешагнул через этот порог и своим методом координат (т. е. чисел, определяющих геометрический образ) создал то направление, которое мы теперь характеризуем словами «арифметизация геометрии». В творчестве Декарта интерес к методологии науки вообще доминировал над стремлением к открытию отдельных, хотя бы и важных фактов. Это сказалось уже в том, что знаменитая его «Геометрия»³⁾ составляет одно из приложений к книге, озаглавленной «Рассуждения о методе... для отыскания истины в науках». То, что не удовлетворяло Декарта в математике древних, живет и в наше время в ощущениях школьника, который может выучить доказательство теоремы, но не в состоянии понять, чем руководствовались, проводя те, а не другие вспомогательные линии (обстоятельство, которое позже дало Шопенгауэру повод говорить о «доказательствах-мышеловках»). Декарт видел выход в создании «универсальной математики», и первым шагом к этому должно

¹⁾ Еще в конце XIX в. знаменитый английский физик В. Томсон убеждал своих слушателей оставить в стороне математическую изощренность позднейшего времени и усвоить, что «производная это просто — скорость». (См. «Математич. просвещение», вып. 1, стр. 138.— *Ред.*)

²⁾ На современном языке мы сказали бы, что препятствием к слиянию двух ветвей математики служило отсутствие теории иррациональных чисел, без чего применение арифметики к геометрии не могло быть полноценным. Однако боязнь нарушить чистоту евклидовой системы могла бы быть оправдана, если бы эта система на самом деле была столь совершенной, какой она представлялась людям того времени.

³⁾ Р. Декарт, Геометрия, ГОНТИ, М. — Л., 1938.

было служить глубокое взаимопроникновение науки о числе и науки о пространстве, осуществленное в его «Геометрии» (термин «Аналитическая геометрия» появился значительно позднее)¹⁾. Именно в этой методологической революции, перенесенной на всю область точного естественного знания, видел Декарт — в большей степени философ, чем математик — свою научную миссию. Он не жалел мрачных красок для того, чтобы охарактеризовать методологическую слабость современной ему науки:

«Смертными настолько владеет слепое любопытство, что они направляют свой ум на неизведанные пути без всякого основания для надежды, просто лишь для того, чтобы испытать, не подвернется ли им под руку то, что они ищут... Так трудятся почти все химики, многие геометры и немалое число философов»²⁾.

Отсюда видно, что создание в XVII в. новой математики имело значение, далеко выходящее за рамки этой науки. Несмотря на глубокие расхождения между Декартом и Ньютоном во взглядах на физику мира, оба творца новой математики подготовили расцвет рационализма и механического материализма, которые были прогрессивными течениями в XVIII в. Поэтому не является неожиданным то внимание, которое уделяли описываемой эпохе классики марксизма. К. Маркс в 40-летнем возрасте взялся за изучение «высшей» математики и не оставлял этих занятий «до самой смерти, занимаясь ею в свободное время или во время болезни, когда систематическая работа над „Капиталом“ была для него невозможна»³⁾. Конечно, «ошибки в подсчетах ... при разработке основных начал экономики» (письмо к Ф. Энгельсу от 11.1 1858 г.) были только поводом для этих занятий. Судя по тому, что Маркс изучал не счетную технику, а начала аналитической геометрии и дифференциального исчисления, устойчивый интерес к этим дисциплинам питался не политико-экономическими, а философскими запросами великого ученого. В этот же круг интересов Маркс вовлек Энгельса, высказывания которого в «Диалектике природы» не оставляют сомнений относительно той роли, какую отводили творцы диалектического материализма эпохе Декарта — Лейбница — Ньютона.

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало немедленно необходимым *дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает

¹⁾ Ту же тенденцию и с большей смелостью продолжал впоследствии Лейбниц, когда пытался построить «геометрическое исчисление», которое «давало бы возможность выражать непосредственно положение, подобно тому, как с помощью алгебры выражают величины» (письмо к Гюйгенсу). Этот замысел был осуществлен значительно позднее созданием *векторного исчисления* точно так же, как другая мечта Лейбница «заменять спор вычислением» предвосхитила современную *математическую логику*.

²⁾ Декарт, Правила для руководства ума. Перев. В. Пикова, М. (1936) (цитировано по книге «Геометрия», стр. 268).

³⁾ С. Яновская, О математических рукописях К. Маркса, «Под знаменем марксизма», 1933, № 1, стр. 74.

и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем»¹⁾.

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изобразить математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение»²⁾.

Быть может, этого беглого исторического обзора достаточно для того, чтобы дать представление о роли, принадлежащей новой математике (будем так условно называть математику XVII и последующих веков) в формировании научного мировоззрения. Когда говорят о математике как о фундаменте точного знания, то надо иметь в виду именно эту математику, а не геометрию Евклида и тригонометрию Региомонтана (математик XV в.). Последние, правда, являются необходимой ступенью к усвоению первой и, обладая собственным образовательным значением, должны сохранить то место, которое им отводится в средней школе. Однако отсутствие в курсе школы элементов новой математики ставит эту дисциплину в такое же положение, в каком находилось, например, в дореволюционной России (до 1912 г.) преподавание русской литературы, когда оно заканчивалось Лермонтовым и Гоголем. Но если можно было почти не сомневаться, что воспитанник той школы без ее участия познакомится с Толстым и Чеховым, то гораздо меньше шансов на то, что юрист или врач собственными силами восполнит пробелы своего математического образования. А без этого он не поймет структуры современной науки, довольствуясь каждый раз ссылкой на то, что и радио, и авиация, и атомная физика опираются на какую-то неведомую ему даже в элементах «высшую» математику. Мы имеем здесь в виду не овладение этой математикой как рабочим аппаратом (что необходимо для физика и инженера, но не для врача и юриста), а знакомство с ее руководящими идеями и методами.

Но может быть эти идеи и методы настолько малодоступны, что не могут быть предметом изучения даже в старших классах? Против этого предположения говорит прежде всего история нашей и зарубежной школы, накопивших за полвека солидный опыт преподавания начал аналитической геометрии и анализа (подробнее об этом — в следующем пункте). Если этот опыт не всегда приводил к бесспорным результатам, то никак не из-за малодоступности предмета, а из-за неправильной постановки его преподавания. В речи, содержащей непревзойденную по убедительности аргументацию за преподавание начал новой математики, известный французский ученый Э. Борель говорил:

«Эти страшные науки, по крайней мере в своих элементах, стоят в гораздо большей близости к усваиваемым в элементарной школе простым математическим сведениям, чем многочисленные рассуждения об

¹⁾ Ф. Энгельс, Дialeктика природы, Госполитиздат, М., 1950, стр. 206 (курсив в цитате принадлежит Энгельсу).

²⁾ Там же, стр. 218.

объемах круглых тел, или об уравнениях второй степени¹⁾, и даже чем вычисления с обыкновенными дробями²⁾ и множество других вопросов, которые внушают ученикам ужас и в девяносто девяти случаях из ста обречены на забвение сейчас же по окончании экзаменов»³⁾.

Констатируя далее «резкое несоответствие между положением математики в жизни современного общества и тем интересом, который питает к ней огромное множество лиц, играющих в этом обществе руководящую роль», Борель продолжает:

«Это печальное явление объясняется тем, что математика, преподаваемая в нашей средней школе, есть лишь схоластический пережиток, тогда как миром правит другая математика, и лишь очень малому числу избранных дано восторгаться гордой мощью той математики. Но всякий образованный человек должен бы по крайней мере знать, что эта математика существует» [добавим: конечно, знать не по названию, а по идейному содержанию]⁴⁾.

Таково мнение специалиста; а вот голос — для нас авторитетнейший — так сказать «учащегося»: «... Это гораздо более легкая часть математики (поскольку речь идет о чисто технической стороне), нежели, например, высшие отделы алгебры», — пишет К. Маркс в письме к Ф. Энгельсу от 6.VII 1863 г., т. е. в результате пяти лет занятий математикой. Педагог не затруднится объяснить себе, почему эти вопросы математики воспринимались Марксом как «более легкие»: не потому, чтобы лежащие в их основе идеи были более примитивными — как раз наоборот, — а потому, что они интереснее, глубже, содержательнее, имеют более очевидное значение для познания мира, чем многое из традиционного курса школьной математики. Между тем известно, в какой мере интерес к предмету облегчает его усвоение⁵⁾.

¹⁾ По-видимому, речь идет о системах таких уравнений.

²⁾ Которые противопоставляются здесь десятичным. Во французской школе уже в то время велась борьба за преобладающее внимание к десятичным дробям (в связи с метрической системой мер; см., например, Г. Лебег, Об измерении величин, Учпедгиз, 1938).

³⁾ Э. Борель, Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки, «Вестник опытной физики и элементарной математики», №№ 623—624, Одесса, 1914, стр. 254—264. [Воспроизведено в «Математическом просвещении», вып. 3, стр. 97—98. — *Ред.*] Эта блестящая речь, произнесенная более 40 лет назад, ничуть не устарела и имеет самое прямое отношение к нашему предмету.

⁴⁾ Там же, стр. 98—99. (*Ред.*)

⁵⁾ В применении к интересующему нас вопросу, косвенным подтверждением могут послужить опубликованные данные о контрольных работах, выполненных в США студентами колледжа в первый год после окончания средней школы (И. Я. Деппман, Уровень математических знаний у кончающих американскую среднюю школу, «Математика в школе», 1946, № 4). На фоне общего низкого уровня математической подготовки, обнаруженного в этих работах, выделяется относительно лучшее усвоение элементов высшей математики. К сожалению, статья не содержит некоторых данных, необходимых для окончательного суждения (например, сведений о давности изучения контролируемых разделов курса), однако влияние момента «интереса к предмету» представляется наиболее вероятным.

Наконец, мы не должны пройти мимо приведенных выше указаний на философское и теоретико-познавательное значение знакомства с элементами новой математики ¹⁾. Сюда можно присоединить еще одну выдержку из цитированной речи Бореля ²⁾:

«Вот уже более двух веков, как принципы механики, аналитической геометрии и дифференциального исчисления с торжеством выдержали испытание временем... И лишь после того, как эти насущные учения займут подобающее им место, преподавание точных наук в нашей средней школе будет действительно современным и получит поистине воспитательное значение» ³⁾.

2. Из истории школы. Эволюция средней школы в конце XIX в. характеризовалась медленным, иногда зигзагообразным, но неуклонным отступлением латино-греческого классицизма под натиском естественных и точных наук. Пришедшая, а в других случаях идущая к власти промышленная буржуазия не могла мириться с тем, чтобы общеобразовательная школа готовила только чиновников для государственного аппарата; ей нужны были инженеры и техники, люди, владеющие современной наукой, вплоть до тех, кто создает эту науку. Между тем для сторонников классицизма математика в школе была главным образом «гимнастикой ума» рядом с логикой и грамматикой ⁴⁾, и с этой точки зрения испытанная веками евклидова схоластика казалась наиболее

¹⁾ В связи с идеологическим содержанием этой математики хотим предупредить одно возможное недоразумение. В «Материализме и эмпириокритицизме» В. И. Ленин пишет (Сочинения, т. XIV, изд. 4, Госполитиздат, 1947, стр. 294:

«Г. Коген, восторгающийся ... идеалистическим духом новой физики, доходит до того, что проповедует введение высшей математики в школы — для ради внедрения в гимназистов духа идеализма, вытесняемого нашей материалистической эпохой». Отдельно взятая, эта цитата может породить впечатление, будто и В. И. Ленин готов видеть в изучении высшей математики источник идеализма. Однако последующий текст («вздорное мечтание реакционера», «утопающий хватается за соломинку») и другие места книги («электричество объявляется сотрудником идеализма», стр. 270) не оставляют сомнения в том, что В. И. Ленин так же далек от мысли об отказе в школе от высшей математики, как и об изгнании из нее учения об электричестве.

²⁾ «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 99.

³⁾ В задачу этой статьи не входит обсуждение всех сторон той реформы преподавания математики, в которой нуждается средняя школа. Однако нельзя умолчать о другой ветви «высшей» математики — *теории вероятностей*, т. е. науки о математических закономерностях в массовых явлениях, которая рядом с аналитической геометрией и анализом уже более 200 лет, как заняла прочное место в научном естествознании. Возрастающее значение «статистического мышления» заставляет желать, чтобы и это завоевание науки (в котором, кстати, крупную роль сыграла русская математика) не осталось за рамками школы. Для первоначального ознакомления рекомендуем читателю книгу: Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчин, *Элементарное введение в теорию вероятностей*. Изд. 4-ое, Гостехиздат, М., 1957. — *Ред.*

⁴⁾ Еще 50 лет назад известный итальянский математик (!) Энриквес писал: «В наш век еще не найдено, чем можно было бы заменить интеллектуальную школу грамматики. Мы имеем в виду особенно греческую грамматику...». (Сборник статей «Вопросы элементарной геометрии» под ред. Ф. Энриквеса, СПб, 1913, стр. 26.)

надежным орудием воспитания. Однако к концу века давление новых требований привело к тому, что рядом с классическими гимназиями возникли «реальные» и «модернизованные» школы без древних языков, но с усилением математики и естествознания. Иногда это были самостоятельные школы особого типа, как у нас в России («реальные» и «коммерческие» училища), в других случаях разделение принимало форму специализации («полифуркация») на старшей ступени обучения (четыре секции во французской школе). Не сразу обрело свое лицо и неодинаковым образом происходило усиление математики в новых школах. Например, в наших реальных училищах оно первоначально шло в сторону начертательной геометрии и расширения курса алгебры. На рубеже XIX и XX вв. новые течения педагогической мысли выделились в так называемое «реформистское движение», выступившее с определенной программой: генетический метод, отправляющийся от живого конкретного созерцания; возможное взаимопроникновение («фузионизм») отдельных математических дисциплин; приближение к естествознанию и технике; развитие «функционального мышления», начинающегося с раннего возраста и завершающегося изучением начал анализа и аналитической геометрии. В 1908 г. сторонники этой программы создали «Международную комиссию по преподаванию математики», объединявшую в 1914 г. представителей 26 стран, в том числе России. На парижской конференции 1914 г. эта комиссия могла уже подвести итоги 10—15-летнего опыта преподавания начал новой математики в большинстве культурных стран мира¹⁾. По поводу преподавания анализа теневые стороны его были отмечены только в тех случаях, когда в погоне за объемом сведений допускали поверхностное изучение предмета. В связи с этим конференция пришла к выводу, что «курс анализа в средней школе должен быть не велик, но проходить его нужно основательно; полужнание хуже незнания»²⁾. На этой же конференции вновь прозвучал мотив, подчеркивающий общеобразовательное значение реформированного курса в противовес господствующей системе специализации.

«... Реформа преподавания математики в средней школе должна рассматриваться не с точки зрения интересов будущих математиков или техников, а с точки зрения интересов общей культуры. В средней школе изучение математики и естествознания должно содействовать образованию человека»³⁾.

¹⁾ А. Поляков, Международная конференция по преподаванию математики, состоявшаяся в Париже с 1 по 4 апреля 1914 г., «Математическое образование», 1914, № 6.

²⁾ Там же, стр. 266.

³⁾ Ф. Клейну это было ясно уже на первом этапе реформистского движения: «Подготовительное изложение понятия о функции и первое введение в аналитическую геометрию с началами дифференциального и интегрального исчисления должно бы быть общим всем видам школ» (цит. по книге «Доклады, прочитанные на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве», стр. 12, М., 1915).

Уже не как мнение отдельных лиц, а как суждение коллектива, та же мысль с полной определенностью была высказана русскими педагогами в п. III резолюции 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики:

«Съезд признает начала аналитической геометрии и анализа необходимыми в курсе средней школы *всех типов*»¹⁾.

«Стало очевидным, что в настоящее время основные понятия исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии и теории вероятностей должны быть достоянием *каждого образованного человека*»²⁾.

В дальнейшем мы остановимся на судьбе новых разделов школьного курса в нашей стране, отсылая по поводу зарубежной школы к литературе³⁾.

Русская педагогическая мысль пришла к сознанию необходимости модернизировать школьное преподавание математики раньше и шире, чем это сделали официальные программы. Киевское физико-математическое общество в 1906 г., Варшавский кружок преподавателей физики и математики в 1908 г., Педагогический музей военно-учебных заведений в 1908 г. выступили с разработанными проектами программ, включавшими преподавание начал анализа и аналитической геометрии. Общими чертами для большинства этих и других аналогичных проектов были: 1) стремление распространить реформу на основную массу средних учебных заведений (мужские гимназии); 2) признание необходимости функциональной пропедевтики; 3) отказ от сосредоточения новых частей курса в последнем классе. Так, киевский проект⁴⁾ предлагал ввести понятие о функциональной зависимости начиная с IV класса гимназии, производную и интеграл в VII классе, начала аналитической геометрии в VIII классе⁵⁾. Правительство лишь частично пошло навстречу этим требованиям: в 1907—1908 гг. начала анализа и аналитической геометрии были введены в программу выпускного (VII) класса реальных училищ, а в 1910—1911 гг. — в программу кадетских корпусов, в обоих случаях без необходимых изменений в предшествующем курсе математики.

¹⁾ Резолюции 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики, «Математическое образование», 1914, № 1. (Курсив мой — Я. Д.)

²⁾ Из речи председателя проф. Б. К. Млодзевского при открытии 2-го съезда [стр. 3 книги А. Полякова (см. сноску 1 на предыдущей стр.)].

³⁾ Журнал «L'Enseignement mathématique — официальный орган «Международной комиссии»; «Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе» под ред. Д. М. Синцова, М., 1914; доклад Д. М. Синцова на 2-м съезде преподавателей математики [стр. 4—20 указанной книги А. Полякова]; Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, перев. с нем., т. 1, II, ОНТИ, 1934.

⁴⁾ Из доклада Ф. В. Филипповича на 1-м съезде преподавателей, Всероссийского съезда преподавателей математики в Москве, М., 1915, стр. 114.

⁵⁾ Ограничиваясь теми сведениями, которые опираются на русскую литературу, мы заранее принимаем на себя упрек в отсутствии данных о современном состоянии интересующих нас сторон преподавания за рубежом. [Напоминаем читателю, что настоящая статья Я. С. Дубнова была написана до 1953 г.—Ред.]

Таким образом, большинство средних учебных заведений осталось незатронутым реформой. Впрочем, даже этот робкий шаг сопровождался опасениями, среди которых наиболее распространенное состояло в том, что те из преподавателей, кто давно отошел от университетской науки, не справятся с новыми задачами. Жизнь не подтвердила этого опасения; зато реформа вызвала несомненное оживление в работе преподавателей и создала подъем, сказавшийся между прочим в появлении исключительного обилия учебников по новым предметам, появившихся в свет на протяжении менее чем 10 лет и написанных большей частью преподавателями средней школы (Д. Горячев, Воинов, К. Н. Рашевский, К. Б. Пенионжкевич, А. Киселев, М. Г. Попруженко, Д. М. Синцов, В. П. Свенцицкий, И. Н. Богословский)¹⁾. Если результаты реформы не оправдали всех ожиданий ее сторонников, то причины лежали в другом: 1) вопреки предостережениям передовых педагогов отсутствовала функциональная пропедевтика; 2) программа была чрезмерно насыщена фактическим содержанием и, копируя 1-й курс высшей школы, уделяла преувеличенное внимание технике дифференцирования и интегрирования²⁾.

Когда с 27.XII 1911 по 3.I 1912 г. заседал 1-й Всероссийский съезд преподавателей математики, явных противников реформы не было слышно; проблема заключалась в том, чтобы распространить ее действие на всю среднюю школу, как об этом можно судить по осторожной, правда, резолюции:

«Съезд признает своевременным ... провести через курс и ярко осветить идею функциональной зависимости, а также ... ознакомить учащихся с простейшими и несомненно доступными им идеями аналитической геометрии и анализа»³⁾.

Более категорическую резолюцию собравшегося два года спустя 2-го съезда мы уже цитировали.

¹⁾ Это явление заслуживает внимания. Когда дискутируется реформа преподавания, то, естественно, на первом плане стоит вопрос о том, что она дает ученику. Но не следует забывать и о вторичном действии: на расширении идейного содержания предмета растет не только ученик, но и его учитель, а это снова благотворно действует на преподавание, объектом которого является ученик.

²⁾ В качестве иллюстрации приведем несколько задач из книги К. Н. Рашевского «Основания анализа бесконечно малых». Учебник для VII кл. реальных училищ, составленный применительно к программе М. Н. Пр., Москва (1913):

Стр. 67: Найти производные функций \sqrt{x} , $x^{\sin x}$; найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнения $\arcsin \left(\frac{y^3 + x^3 - 3x^2y}{y^3 + x^3 - 3xy^2} \right) = a$. Стр. 93: Найти $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

³⁾ Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики, т. I, стр. 568—569.

Естественно, что на всем протяжении борьбы за реформу представители математики пользовались безоговорочной поддержкой со стороны физиков¹⁾.

В дооктябрьский период последним значительным этапом в деле реорганизации школьной математики были произведенная в 1915 г. комиссией П. Н. Игнатьева (министра народного просвещения) работа по пересмотру программ средней школы²⁾ и последовавшая затем дискуссия. Комиссия наметила 7-летнюю среднюю школу (над 3-летней начальной) с разветвлением в старших классах на два отделения: гуманитарно-классическое и реальное. Для последнего была предусмотрена несколько урезанная (изъято понятие об интеграле) программа реального училища со всеми ее недостатками; всё же на анализ и аналитическую геометрию было отведено 3 недельных часа для физико-математической ветви и 2 недельных часа для естественно-исторической ветви реального отделения. Работа комиссии подверглась серьезной критике со стороны наиболее крупного коллектива преподавателей математики — Московского математического кружка³⁾.

Великая Октябрьская революция принесла сторонникам реформы полное признание их позиции. Конечно, в духе советской школы были и требование единообразного обучения, и его общеобразовательный характер, и стремление приблизить школу к науке и технике. Согласно программе 1920 г. для Единой трудовой школы, знакомство с важнейшими функциями начиналось на 6-м году обучения, умеренная программа по аналитической геометрии входила в план 9-го года, такая же программа по анализу — в план 10-го года. В объяснительной записке сказано:

«При отсутствии разветвлений на старшей ступени единой школы программа по математике должна ограничить свои цели только интересами общего образования. Именно в этих интересах, а отнюдь не в интересах тех учащихся, которые в своей дальнейшей деятельности будут нуждаться в специальных математических сведениях, в последних классах 2-й ступени вводятся элементы аналитической геометрии и анализа, главным образом дифференциального исчисления»⁴⁾.

К сожалению, эти превосходные принципы остались на бумаге: общеизвестные трудности, пережитые школой в период гражданской

¹⁾ Из доклада А. И. Бачинского «Запросы преподавателя физики в области математики» на 2-м съезде (стр. 65): «...Введение основ анализа бесконечно малых в курс общеобразовательной средней школы есть дело назревшей необходимости ... лишенная их общеобразовательная школа в XX веке может не удивлять нас только в силу застарелой привычки». (Доклады, читанные на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве, М., 1915, стр. 65.)

²⁾ См. «Материалы по реформе средней школы», Журн. Мин. нар. просв., ноябрь 1915 — февраль 1916.

³⁾ «Доклады в заседаниях комиссии Московского математического кружка», «Математическое образование», 1926, № 4. В них содержатся отзывы членов кружка о программах комиссии Игнатьева. Анализ и аналитической геометрии посвящены доклады А. К. Власова и А. П. Полякова.

⁴⁾ Н. Н. Никитин, Преподавание математики в советской школе 1917—1947 гг., «Математика в школе», 1947, № 5, стр. 11.

войны, позже — извращения в школьной политике привели к тому, что восстановительная работа 1931—1932 гг. вернула преподавание математики (именно этой дисциплины, а не других) к урезанным программам и слегка переработанным учебникам начала нашего века. Правда, в 1933—1934 гг. намечалось восстановление анализа и аналитической геометрии в старшем классе, и с этой целью были изданы два учебника¹⁾, но позже Наркомпрос от этого плана отказался. Такое положение продолжалось до 1947 г., когда в одном из двух проектов программы Министерства просвещения РСФСР²⁾ элементы анализа и аналитической геометрии возрождаются, впрочем, в очень скромном объеме (54 уч. часа в XI кл.).

3. Пропедевтика анализа и аналитической геометрии. В тех случаях, когда преподавание этих дисциплин осуществляется как завершение курса школьной математики, надо избежать педагогической ошибки, которая наблюдалась много раз, в частности в наших дореволюционных реальных училищах. Начала аналитической геометрии и анализа появились (обычно — в выпускном классе) как *пристройка* к традиционному курсу математики и как бледная (иногда — вульгаризированная) копия университетского преподавания. Если искать здоровое зерно в аргументации тех, кто возражал и продолжает возражать против включения новой математики в школьный курс, то в разнообразии доводов можно будет выделить два основных направления, идущих из двух противостоящих друг другу источников. Представители средней школы бывают недовольны тем, что на заключительной стадии обучения внимание учеников отвлечено в сторону совершенно новых идей вместо того, чтобы сосредоточиться на укреплении и обобщении изученного. Они опасаются, что новое будет усвоено поверхностно, а старое потускнеет или даже будет частично забыто. С другой стороны, высшая школа боится доверить средней преподавание принципиально важных вещей; высокий научный уровень изложения она считает своей привилегией и хочет учить, но не «переучивать». По поводу последнего возражения надо сразу сказать, что оно продиктовано узко «ведомственной» точкой зрения. Ведь далеко не все окончившие среднюю школу будут изучать математику в высшей. Если признать знакомство с новой математикой необходимым элементом общего образования, то становится очевидным, что мы не имеем права урезать это образование

¹⁾ Я. С. Дубнов, Введение в аналитическую геометрию, Учпедгиз, 1934; И. И. Привалов и С. А. Гальперн, Основы анализа бесконечно малых, Учпедгиз, 1935. Эти книги предназначены в качестве учебников для средней школы, но в результате отказа Наркомпроса РСФСР от ранее напечатанной программы получили подзаголовки «пособие для учителей». [Обе книги позже были переизданы Физматгизом уже без этого подзаголовка (первая в 1959, вторая в 1949 г. — *Ред.*)]

²⁾ Программа средней школы. Математика (Проект, 1-й вариант, составленный Институтом методов обучения Академии педагогических наук. Учпедгиз, 1947.

в интересах одной группы учащихся. Несправедливо также утверждение, будто средняя школа не в состоянии обучать элементам новой математики на достаточно высоком научном уровне: ни содержание этой математики, ни дух школьного преподавания не дают оснований для такого скептицизма,— к этому мы не раз будем возвращаться в дальнейшем, обсуждая отдельные стороны обучения. Впрочем, здесь уместно ответить одновременно на возражения, идущие как из средней, так и из высшей школы. Эти возражения мы считаем направленными не против возможности преподавать в средней школе элементы новой математики, а против реальной опасности извращения такого преподавания. Опасность же эту можно преодолеть, если положить в основу следующий тезис: *новая математика должна быть не пристройкой к традиционному курсу, а надстройкой над ним — надстройкой, на которую заблаговременно должен быть рассчитан фундамент всего здания.* Тем самым мы подходим к проблеме пропедевтики анализа и аналитической геометрии.

Идеальной была бы такая постановка преподавания математики, при которой представлялось бы невозможным установить момент перехода старой математики в новую. Такие фундаментальные для современной математики понятия, как *функция*, *предел* (по крайней мере, предел числовой последовательности, т. е. функции натурального аргумента), *координаты*, *график функции*, должны войти органической частью в преподавание математики задолго до того, как появится производная, интеграл и уравнения линий. Материал для формирования этих понятий в изобилии доставляется всеми разделами школьного курса — алгеброй, геометрией, тригонометрией. Не вдаваясь в подробности, мы ограничимся здесь несколькими замечаниями, иллюстрирующими характер и возможности интересующей нас пропедевтики.

Идея функциональной зависимости заложена уже в арифметике (изменение результата каждого из четырех действий в связи с изменениями компонент; позднее — прямая и обратная пропорциональности), но в чистом виде она выступает в тот момент, когда появляется алгебраическая формула или «алгебраическое выражение» (здесь пропедевтика следует историческому ходу развития: именно через эти ворота понятие функции вошло в науку). Правда, при этом возникает чрезмерная общность, так как сразу появляется функция нескольких переменных (например, $(b-c)a$ есть функция трех переменных), чего мы постарались бы избежать, если бы на первых уроках алгебры понятие о функции было главной, а не побочной педагогической целью,— мы начали бы тогда с функции одного переменного (т. е. с алгебраического выражения, содержащего только одну букву). Тем не менее уже на этой стадии обучения уместно фиксировать внимание ученика на том, что одно и то же алгебраическое выражение принимает различные числовые значения в зависимости от того, какие числа мы подставляем в это выражение вместо букв; на языке «зрелой» математики эта подстановка есть не что иное, как нахождение частного значения

функции¹⁾. Позже, но все еще в пределах 8-летней школы, в центр внимания становится уравнение с одним неизвестным, а вместе с ним функция одного переменного. Здесь ресурсы педагога получают мощное подкрепление в виде графического изображения такой функции. Необходимое при этом знакомство с декартовыми координатами точки на плоскости облегчит в будущем усвоение аналитической геометрии и геометрических приложений анализа. Но, конечно, не ради этой отдаленной цели графики вводятся и в дальнейшем неизменно сопутствуют изучению квадратной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Следует только предостеречь от иллюзии, будто широко поставленным изучением графиков функций можно заменить ту аналитическую геометрию, о которой идет речь в этой статье. В грубых чертах аналитическая геометрия есть «приложение алгебры к геометрии», в то время как графики — «приложение геометрии к алгебре». Внешним образом это различие сказывается в том, что в последнем случае мы имеем дело с *графиком функции* (одного переменного), а в аналитической геометрии (на плоскости) с *графиком уравнения*, связывающего два переменных. Этим, конечно, не умаляется пропедевтическое значение графиков: как знакомство с координатами, так и расширение запаса геометрических образов (парабола, равноосторонняя гиперболa) будут использованы в преподавании аналитической геометрии.

Другое важное для анализа понятие — *предел последовательности* — также может быть хорошо подготовлено в курсе алгебры (например, в связи с бесконечной геометрической прогрессией при широком использовании неравенств), и именно здесь, а не преимущественно в курсе геометрии, как предлагает сильная еще традиция. При этом мы имеем в виду не теоремы о пределах, которые можно отодвинуть до изучения начал анализа, а самое понятие предела. Как раз алгебра доставляет нам образцы *эффективного вычисления* предела с оценкой разности между пределом и общим членом последовательности, между тем как в геометрии обычно устанавливается лишь существование предела (классический пример — длина окружности) и то — на основании теоремы (принимаемой без доказательства) о монотонной ограниченной последовательности.

Принято думать, что подобными примерами предельного перехода исчерпывается участие геометрии в функциональной пропедевтике. Это верно, если исходить из принятого у нас изложения геометрии (по учебнику А. Киселева). Между тем стоит лишь несколько изменить (с пользой для дела) формулировку ряда геометрических теорем, для того чтобы идея функции и здесь выступила в отчетливой и поучительной форме. Например, вместо традиционной леммы о подобии треугольников можно формулировать следующее предложение: если прямая,

¹⁾ В. Л. Гончаров, Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика в средних классах школ, Изд. Академии педагогических наук РСФСР, 1946, № 6.

пересекающая стороны угла, перемещается, оставаясь параллельной данному направлению, то отрезки, отсекаемые этой прямой от сторон угла, а также отрезок секущей, заключенный внутри угла, изменяются прямо пропорционально расстоянию ее от вершины угла. Аналогичная теорема стереометрии говорит о плоскости, параллельно перемещающейся и пересекающей многогранный (общее — телесный) угол; здесь площадь сечения изменяется пропорционально квадрату расстояния плоскости от вершины (уместно связать эту теорему с законом освещенности в физике). Именно в такой формулировке обе теоремы хорошо приспособлены для применения так называемого «метода Кавальери», столь плодотворного в теории площадей и объемов. Заодно отметим, что этот метод кроме того, что создает превосходную ступень к идее интеграла, ценен еще тем, что заставляет каждый раз изучать площадь сечения как функцию расстояния секущей плоскости от некоторой неподвижной точки и таким образом вносит в геометрию функциональное начало.

Наконец, тригонометрия в значительной своей части (именно — в так называемой гониометрии) занимается изучением простейших периодических функций, роль которых в естествознании общеизвестна (в физике — периодические явления, в частности простое гармоническое колебание). Как раз здесь, а не в решении треугольников, лежит главное идейное содержание предмета, вопреки исторически сложившемуся названию (тригонометрия — измерение треугольников) и традиции преподавания.

В заключение этих, не претендующих на полноту замечаний, сопоставим их с практикой нашей школы. В программах 1947 г. элементы пропедевтики в известной мере представлены (координаты, графики функций, пределы и др.), во всяком случае преподаватель имеет возможность поднять их удельный вес. На практике мы наблюдаем иное: пониженное внимание к этим вопросам, доходящее до минимального, а иногда чисто формального выполнения относящихся сюда пунктов программы. Не объясняется ли это положение тем, что пропедевтика не получает здесь естественного завершения в виде концентрированного изучения начал анализа и аналитической геометрии? Можно ли ожидать жизнеспособности от той подготовительной работы, которая будет полностью¹⁾ использована лишь частью учащихся и притом за пределами средней школы?

II. НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

4. Метод координат. Когда мы настаивали выше на общеобразовательном значении новой математики, то имели в виду прежде всего знакомство с *методами*, господствующими в современной науке, и

¹⁾ Именно «полностью», так как мы вовсе не собираемся отрицать собственного образовательного значения перечисленных в тексте вопросов, отнесенных там к пропедевтике.

лишь во вторую очередь — усвоение новых математических фактов. Конечно, в преподавании методы не могут быть оторваны от добываемых с их помощью фактов, но педагог в каждом случае должен иметь ясное представление о том, где проходит магистральная линия его усилий. Когда, например, от решения двух уравнений с двумя неизвестными переходят к трем уравнениям с тремя неизвестными, то в принципиальном отношении очень немногое прибавляется к тому, что ученик уже усвоил; здесь главная задача состоит в расширении опыта ученика и в приобретении им дополнительных навыков. Иную цель ставит себе преподавание аналитической геометрии: если бы даже оно не вывело нас за рамки тех фигур (в планиметрии — образованных прямыми линиями и окружностями), которые изучаются в традиционном курсе, а только дало бы учащимся в руки новые и более совершенные средства для решения задач, относящихся к таким фигурам, то и тогда преподавание этой дисциплины было бы оправданным. На самом же деле, мы легко можем средствами аналитической геометрии познакомить ученика с такими кривыми, как эллипс, гипербола, спирали, и разумеется, нет никаких оснований к тому, чтобы отказываться от этих полезных сведений¹⁾.

В чем же состоит метод аналитической геометрии? Ученик старших классов имел уже не один случай убедиться в значительности той помощи, которую геометрия получает со стороны алгебры. Одна только теорема Пифагора, записанная в виде равенства

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (1)$$

служит источником ряда новых соотношений и средством решения многих задач. Причина успеха здесь в том, что формула является алгебраическим эквивалентом геометрического факта, точнее — условием, необходимым и достаточным для того, чтобы треугольник ABC был прямоугольным (с прямым углом, лежащим против стороны c). Как только геометрический факт переведен на язык алгебры, весь аппарат последней с хорошо разработанными приемами тождественных преобразований и решения уравнений поступает в наше распоряжение. Отсюда недалеко до мысли — составить возможно более полный «словарь» для перевода с геометрического языка на алгебраический. Эта задача была разрешена в первой половине XVII в. французскими математиками Декартом и Ферма, положившими в основу своего словаря

¹⁾ Такое положение, при котором оканчивающий среднюю школу не имеет представления об эллипсе, неприемлемо даже с точки зрения нынешних программ. Ведь без этого он не поймет ни законов Кеплера в космографии, ни описания структуры атома в физике. Однако если бы речь шла только о пробелах в геометрических познаниях, то их можно было бы восполнить и на базе старых методов. На этот именно путь вступила еще в конце прошлого века немецкая школа, вводя в курс старших классов такие разделы, как «синтетическая теория конических сечений», «сферическая тригонометрия». Лежащая здесь в основе педагогическая концепция — «новые факты старыми методами» — диаметрально противоположна нашей.

«координаты» как числовой эквивалент первичного геометрического понятия — точки¹⁾).

Идея координат возникла очень давно, когда астрономы, а затем географы стали пользоваться «широтой» и «долготой» для определения положения точки на поверхности сферы. Еще в XIV в. н. э. французский математик Оресм применял эти термины к точкам на плоскости; следовательно, по существу, он уже пользовался абсциссой и ординатой. Конечно, это еще не аналитическая геометрия Декарта. Последняя появляется в тот момент, когда мы получаем возможность находить расстояния, углы, площади по координатам точек, и входит в полную силу, когда вместо линий и поверхностей выступают уравнения, выражающие зависимости между координатами.

В хронологическом порядке аналитическая геометрия была развита сначала для плоскости, позже (начало XVIII в.) для пространства, и только в XIX в. авторы некоторых руководств из педагогических соображений стали присоединять сюда «аналитическую геометрию на прямой». Выдвигая на первый план усвоение *метода*, средняя школа может ограничиться геометрией на плоскости; переход к пространству, требуя значительного усложнения аппарата, не дает существенно нового в смысле метода (впрочем, ради укрепления идеи координат стоит затратить час-другой на определение координат точки в пространстве и соответствующие упражнения). Зато принятие в качестве исходного пункта «аналитической геометрии на прямой» как педагогический прием вполне себя оправдало. Нужды нет, что ученики, занимаясь графиками, уже давно практически овладели координатами на плоскости; если мы хотим с надлежащей полнотой и систематичностью изложить введение в аналитическую геометрию, то необходимо уточнить и углубить понятие о координатах, а для этого вряд ли можно найти лучший пункт отправления, чем координаты на прямой. Как это сделать, будет намечено немногими строками ниже, но сначала выскажем несколько общих соображений относительно научного уровня преподавания в средней школе, тем более уместных, что эти соображения определяют нашу позицию не только в данном случае, но и в ряде последующих. Быть может, на первый взгляд покажется парадоксальным мнение, что в деле преподавания начал «высшей» математики средняя школа должна добиваться более выдержанного научного уровня, чем тот, который

¹⁾ Название «аналитическая геометрия», появившееся в начале XVIII в., нельзя признать удачным. Считая логические категории «анализа» и «синтеза» характерными соответственно для науки о числе и науки о пространстве, противопоставляли аналитическую геометрию «синтетической», основанной на чисто геометрических методах. С точки зрения школьной терминологии, включающей в алгебру и трансцендентные функции (показательную, логарифмическую), более подходящим было бы название «алгебраическая геометрия», однако оно употребляется теперь в более узком смысле. В современной литературе появился термин «координатная геометрия», который не получил, однако, широкого распространения, хотя, по-видимому, он наилучшим образом отражает существо предмета.

имеет место в технической школе. Для последней математика — рабочий инструмент, которым студент должен овладеть с достаточной полнотой и притом в кратчайший срок, чтобы не задерживать изучение прикладных дисциплин. Вероятно, этими особенностями объясняется тот факт, что учебники высшей математики для технической школы часто стоят на низшем научном уровне, чем достигаемый в старших классах средней школы¹⁾.

Именно отсюда может идти тот скептицизм, который проявляют иногда академические круги по отношению к преподаванию элементов новой математики в средней школе. Однако казалось бы, что из этого положения следовало бы сделать другой вывод: преподавание математики в средней школе должно быть иного стиля, чем в техническом и в других вузах, где в качестве подсобного читается «сокращенный курс высшей математики». Добавим к этому, что оно не должно копировать и преподавания на 1-м курсе физико-математических факультетов, рассчитанного на особую аудиторию будущих специалистов. К счастью, все эти требования не создают для средней школы никакой коллизии. Будучи общеобразовательной, эта школа может сосредоточить внимание на идейной стороне предмета (разумеется, в меру ее доступности среднему ученику старших классов), не гонясь, например, при изучении анализа за достижением беглости в дифференцировании и интегрировании. Специфика классных занятий (беседа, постоянный контроль и опрос, сравнительно медленный темп изучения) также создает обстановку, более благоприятную для овладения новыми идеями, чем лекционная система высшей школы. Нижеследующие строки, содержащие набросок одного из вариантов введения в аналитическую геометрию, пусть послужат иллюстрацией к этим общим соображениям.

Прямая линия называется «ориентированной», если на ней выделено (и обозначено стрелкой) одно из двух возможных направлений. Если на такой прямой даны две точки A и B , то после того, как выбран эталон длины, можно рассматривать наряду с обыкновенным («абсолютным») расстоянием AB (или BA) между A и B также «относительное расстояние от A до B », определяя его как положительное или отрицательное число, равное $+AB$ или $-AB$, смотря по тому, совпадает ли

¹⁾ Приведем один только иллюстрирующий это положение пример. Когда в средней школе занимаются иррациональными уравнениями, то настойчиво обращают внимание учеников на тот факт, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат могут появиться посторонние решения. Между тем в высшей школе, когда от уравнения, скажем, эллипса, написанного в виде $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$, переходят к уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то приходится дважды возводить в квадрат, причем большинство учебников (даже университетских) замалчивает здесь существенно важный вопрос о возможности появления посторонних решений. На самом деле их в данном случае не получается, что может быть выяснено дополнительным исследованием, основанным на неравенстве $c < a$. Однако вдумчивый студент заметит, что та требовательность, которую в нем воспитывала средняя школа, здесь снижена.

направление, идущее от A к B , с направлением ориентированной прямой или противоположно ему. Обозначая относительное расстояние символом \widetilde{AB} ,

$$\widetilde{AB} = -\widetilde{BA} \text{ или } \widetilde{AB} + \widetilde{BA} = 0.$$

С какой целью вводится это понятие, нетрудно объяснить. Если на прямой даны три точки A , B и C , то между абсолютными расстояниями AB , BC , AC имеет место то или иное соотношение, смотря по тому, какая из этих точек лежит между двумя другими. В противоположность этому относительные расстояния всегда связаны одной и той же зависимостью

$$\widetilde{AB} + \widetilde{BC} = \widetilde{AC} \text{ или } \widetilde{AB} + \widetilde{BC} + \widetilde{CA} = 0$$

(«теорема Шаля»). Эта теорема, позволяющая, «не глядя на чертеж», утверждать нечто об относительных расстояниях, имеет фундаментальное значение для обоснования аналитической геометрии, в частности для доказательства общности ее формул¹⁾.

Теперь мы имеем возможность каждой точке, взятой на прямой, погавить в соответствие определенное число — координату (абсциссу) этой точки. Для этого достаточно установить на прямой «систему координат», состоящую из трех элементов: 1) направление (одно из двух возможных), называемое «положительным»; 2) эталон длины (масштаб); 3) определенно выбранная на прямой точка — «начало координат». Для любой точки (A), лежащей на прямой, назовем координатой (x_A при просто x) относительное расстояние от начала координат (O) до этой точки:

$$x_A = \widetilde{OA}.$$

Естественно встает вопрос: как отзывается на координате точки изменение системы координат («преобразование координат»), которое может иметь здесь тройкий характер: изменение 1) положительного направления (на противоположное); 2) эталона длины; 3) положения начала координат. Наиболее важным является третий тип преобразования (хотя и первые два заслуживают упоминания и разъяснения, скажем, на примере перехода от одной температурной шкалы к другой) — остановимся на нем подробнее.

Если начало координат перенесено из точки O в точку O' (рис. 1), имеющую в старой системе абсциссу a , то, обозначая через x и x'

¹⁾ Меньшее значение имеет «обобщенная теорема Шаля»: если на ориентированной прямой имеется n точек A_1, A_2, \dots, A_n , то

$$\widetilde{A_1 A_2} + \widetilde{A_2 A_3} + \dots + \widetilde{A_{n-1} A_n} = \widetilde{A_1 A_n}.$$

Однако и этим обобщением не следует пренебрегать, так как вывод его дает хороший повод для доказательства от n к $n+1$, а содержание его — благодарный материал для упражнений.

соответственно координаты точки A в старой и в новой системе, имеем:

$$x' = x - a, \quad x = x' + a \quad (2)$$

(можно рекомендовать и словесную формулировку, которая позже будет повторяться для случаев плоскости и пространства).

Справедливость этих формул очевидна, если исходить из расположения точек O, O', A , показанного на чертеже. Остается, однако, открытым вопрос, сохраняют ли эти формулы силу при ином расположении точек. Воспользуемся этим случаем для того, чтобы высказать несколько общих соображений о характере вывода формул аналитической геометрии.

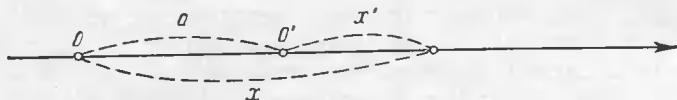


Рис. 1.

1-й метод. Вывод основывают на чертеже, изображающем одно из возможных расположений частей фигуры, и притом такое, при котором результат получается с наибольшей легкостью и наглядностью [в нашем случае таков вывод формул (2) из рис. 1]. Вслед за тем перечисляют *все* другие возможные расположения частей фигуры и предлагают для каждого из них убедиться, каждый раз на основании нового чертежа, в справедливости той же формулы. Недостатки этого метода: а) перечисление и классификация всех существенно различных случаев могут оказаться затруднительными (в нашем примере, для точек O, O', A следовало бы рассмотреть 13 возможных расположений на прямой, включая сюда и случаи совпадения точек); б) число подлежащих проверке случаев бывает значительным, что на практике приводит к отказу от исчерпывающего доказательства; в) простая констатация совпадения результатов при различии в их выводе производит впечатление случайной и оставляет ощущение невыясненности действительного источника этих совпадений (дефект не логического, а психологического порядка).

2-й метод. Пользуясь общими предложениями вроде теоремы Шалля, дают сразу для общего случая вывод формулы, не опирающийся на чертеж. В нашем примере такой вывод немедленно получается, если написать

$$\widetilde{OA} = \widetilde{OO'} + \widetilde{O'A}$$

и заметить, что $\widetilde{OA} = x, \quad \widetilde{OO'} = a, \quad \widetilde{O'A} = x'$ ¹⁾.

¹⁾ Можно заметить, что тяжесть рассмотрения отдельных случаев переносится теперь на теорему Шалля. Однако роль ее в том и заключается, чтобы, выполнив эту кропотливую работу один раз, освободиться от нее в ряде последующих доказательств.

Этому выводу, безупречному в смысле полноты, не хватает одного элемента, в деле преподавания далеко не безразличного, — наглядности. Можно поэтому думать, что педагогически оправданным, по крайней мере на первом этапе изучения аналитической геометрии, явилось бы получение формулы из благоприятного чертежа с последующим выводом ее без всякого чертежа. И хотя логически второй вывод делает излишним первый, однако при необходимости восстановить содержание формулы ученик призовет на помощь именно благоприятный чертеж (например, формулу $x' = x - a$ он восстановит, представляя себе, что начало координат переместилось вправо на расстояние a , вследствие чего для всех точек, лежащих правее нового начала, абсциссы уменьшались на a).

Теперь, после того как основные методические установки формулированы и пояснены на примерах, дальнейший обзор содержания курса можно сделать кратким. Из геометрии на прямой достаточно рассмотреть три задачи: 1) *о расстоянии* (абсолютном и относительном) между двумя точками (формулы $\widetilde{AB} = x_B - x_A$, $AB = |x_B - x_A|$); 2) *о делении отрезка пополам* ($x = \frac{x_1 + x_2}{2}$) и более общую 3) *о делении отрезка в данном отношении* ($x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ или $x = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}$), причем здесь можно ограничиться случаем внутреннего деления ($\lambda > 0$)¹⁾. Полученные результаты будут позже использованы в геометрии на плоскости. Самостоятельное значение третьей из перечисленных задач можно иллюстрировать на примере нахождения центра масс (или центра тяжести) двух, а затем нескольких материальных точек, для которых известны массы и координаты²⁾.

Обращаясь к геометрии на плоскости, следует вернуться к уже знакомым ученику понятиям: абсцисса и ордината. Система координат состоит здесь из двух взаимно-перпендикулярных ориентированных прямых (оси координат Ox и Oy) и эталона длины, одного и того же для всех направлений³⁾. Одновременно естественным образом возникает система координат на каждой из осей Ox , Oy , и мы получаем возможность свести определение координат в двумерном случае к одномерному: если A_x и A_y — соответственно проекции (ортогональные) точки A на оси Ox и Oy , то по определению (которое полезно формулировать и словами)

$$x = \widetilde{OA}_x, \quad y = \widetilde{OA}_y.$$

¹⁾ От соблазна познакомить учащихся с двойным (ангармоническим) отношением четырех точек, а тем более с бесконечно удаленной точкой, следует воздержаться: в первом случае — из принципа строгой экономии в сообщении новых фактов; во втором — из-за трудности дать подлинно научное изложение.

²⁾ См., например, §§ 4—6 учебника Я. С. Дубнова, указанного на стр. 27.

³⁾ При построении графиков нередко пользуются разными масштабами для осей Ox и Oy ; в аналитической геометрии это ненужным образом усложнило бы изложение.

Было уже указано, что знакомство с координатами в пространстве можно не считать обязательным для нашего курса; но если это делать, то именно сейчас — для укрепления идеи координат. Ничего не придется менять в определении координат; прибавится только новая формула, $z = \tilde{OA}_z$, и новый термин — *аппликата* (так часто называют третью координату z). Однако некоторое время необходимо затратить на решение простых задач проекционного черчения: построение точки по данным ее трем координатам и обратная задача.

Теперь предстоит вывести формулы, посредством которых выражаются длины отрезков, углы между прямыми и площади прямолинейных фигур по координатам точек и по координате направления («подъему» — см. ниже). В интересах полноценного вывода этих формул полезно с самого начала иметь в своем распоряжении формулы преобразования координат для специального случая — параллельного переноса осей:

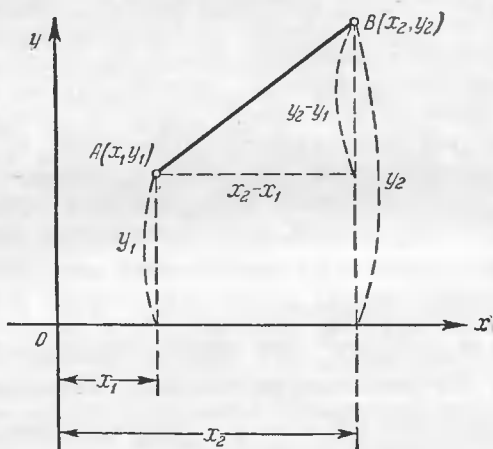


Рис. 2.

$$x' = x - a, \quad y' = y - b \quad \text{или} \quad x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad (3)$$

вывод которых уже подготовлен [см. (2)]¹⁾. Например, формулу для расстояния (разумеется, абсолютного) между двумя точками можно получить в два этапа: 1) расстояние точки $A(x, y)$ от начала координат O выражается формулой $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$; 2) пользуясь (3), легко получить для точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Исходя из соображений, развитых выше (стр. 36), полезно предпослать этому вывод той же формулы из благоприятного чертежа (рис. 2).

В задаче о делении отрезка в данном отношении вывод формул

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad \text{или} \quad x = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}, \quad y = \frac{n_2 y_1 + n_1 y_2}{n_1 + n_2}$$

подготовлен решением той же задачи в одномерном случае. Хорошей

¹⁾ Не представляло бы большого труда получить более общие формулы преобразования координат, включающего поворот осей. Следует, однако, отказать от всякого расширения курса, не оправдываемого в дальнейшем существенными приложениями.

иллюстрацией может служить координатное доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника. Ученик, уже знакомый с элементарно-геометрическим доказательством, будет иметь поучительный случай сравнить два метода.

Несколько отклоняясь от традиции, мы предлагаем включить в этот раздел курса понятие *о подъеме* (угловом коэффициенте)¹⁾ прямой. В учебниках обычно откладывают знакомство с этим понятием до встречи с уравнением прямой, и эта ассоциация в сознании ученика оказывается настолько прочной, что он, например, вычисляет подъем прямой по двум точкам, составляя уравнение этой прямой. Между тем подъем также является координатой, но только не точки, а прямой, рассматриваемой как элемент одномерного образа — пучка прямых. Поэтому включение этого понятия в главу об основных координатных формулах кажется естественным, тем более, что подъем (m) сейчас же связывается с координатами точек в силу формул $m_{OA} = \frac{y}{x}$ [для прямой, соединяющей точку $A(x, y)$ с началом координат O] и $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ [для прямой, соединяющей точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$].

За этим следуют признаки параллельности ($m = m'$) и перпендикулярности ($m' = -\frac{1}{m}$) прямых; наконец, формула для угла между двумя прямыми, подъемы которых известны: $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{m' - m}{1 + mm'}$ (двойной знак здесь неизбежен, поскольку мы считаем прямые неориентированными).

Главу можно закончить формулой, выражающей площадь треугольника через координаты его вершин. Чтобы не усложнять изложения, следует ограничиться элементарно-геометрической точкой зрения на площадь (положительное число), вследствие чего в формулах

$$\text{пл. } OA_1A_2 = \frac{1}{2} |x_1y_2 - x_2y_1|,$$

$$\text{пл. } A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

появляется знак абсолютного значения. Сюда же естественным образом примыкает условие, необходимое и достаточное для прямолинейного расположения трех точек²⁾.

¹⁾ Этот тяжеловесный термин, по-видимому, доживает последние дни (вслед за «дифференциальным коэффициентом», как еще в XIX в. называли «производную»). В зарубежной литературе все чаще предпочитают термин, состоящий из одного слова (slope, pente, Steigung). У нас термин «подъем» встречается в учебниках А. Киселева «Элементы алгебры и анализа» и Я. С. Дубнова «Введение в аналитическую геометрию». В учебнике И. И. Привалова и С. А. Гальперна «Основы анализа бесконечно малых» мы находим вместо этого «наклон»; однако наклоном обычно называют угол, а не его тангенс.

²⁾ Ко всему разделу курса см. §§ 7—15 учебника Я. С. Дубнова, где порядок и детали изложения несколько отличаются от предложенных в настоящей статье; там же имеется большое число задач. По поводу решения задач

5. Уравнение линии. Две основные задачи аналитической геометрии. Вводная глава курса, обзор которой только что был дан, составляет звено, необходимое для дальнейшего изучения предмета, но еще не содержит центральной его идеи: соответствия между линиями и уравнениями. За отправной пункт возьмем давно знакомое ученику понятие — *геометрическое место точек, обладающих данным свойством*. Десяток-другой примеров геометрических мест, появляющихся в школьном курсе, создает впечатление, что область применения этого понятия узка. Между тем теперь эта область беспредельно расширяется: стоит написать какое-нибудь уравнение вида $F(x, y) = 0$, для того чтобы возник вопрос о геометрическом месте точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению (при подстановке абсциссы вместо x , ординаты вместо y). Это геометрическое место, состоящее обычно из одной или нескольких линий, называется графическим изображением или *графиком уравнения* $F(x, y) = 0$. Заметим — уравнения, а не функции, как было до сих пор; конечно, первое понятие является обобщением второго: если уравнение имеет вид $y = f(x)$, то говорят о графике функции $f(x)$. Обратно, если задана линия (геометрическими свойствами, которые ее определяют), то можно искать уравнение, для которого эта линия служит графиком, — оно и называется *уравнением данной линии*.

В силу этого определения уравнение линии выражает такую зависимость между координатами (x и y) точки, которая является условием *необходимым* и *достаточным* для того, чтобы точка принадлежала этой линии. Как ни прозрачны по своей логической структуре эти определения, опыт показывает, что они медленно и лишь через большое число иллюстрирующих примеров входят в сознание ученика. Отсюда — необходимость сопроводить изучение этих новых понятий решением достаточного числа задач двойного рода:

1. *Линия определена своими (геометрическими) свойствами — составить ее уравнение.* При этом система координат может быть указана в условии задачи, а в других случаях выбор ее предоставляется нам. В начальной стадии мы не ставим себе целью расширить запас изученных линий; поэтому можно ограничиться задачами, относящимися к прямой и окружности, например: составить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R ($x^2 + y^2 = R^2$); то же для случая, когда центр окружности лежит в точке (a, b) [$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$]; написать уравнение оси симметрии двух точек (a, b) и (a_1, b_1) :

$$[2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0].$$

позволим себе привести выдержку методического содержания из предисловия к этому учебнику: «решение задач, которое по общему замыслу не отделимо от изучения текста, должно всякий раз сопровождаться чертежом — точным или схематическим, выполняемым до выкладки или после нее».

2. Дано уравнение линии — изучить ее (геометрические) свойства (или взаимоотношения с другими линиями, входящими в условие задачи, например с осями координат). Эта задача имеет несколько распылчатый характер (до каких пределов должно быть доведено «изучение линии»? как, впрочем, и другие вопросы школьной математики, относящиеся к так называемому «исследованию уравнений». Во всяком случае ученик должен хорошо уяснить себе на ряде примеров, что все свойства изучаемой линии, вплоть до мельчайших деталей, могут быть «вычитаны» из ее уравнения, которое, таким образом, содержит полное описание линии.

Теперь своевременно установить два общих результата этого рода:

а) Всякое уравнение вида

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad (A \neq 0)$$

выражает окружность, если оно вообще принадлежит какой-либо линии¹⁾. В ходе доказательства [путем преобразования этого уравнения к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$] выясняется, как для этой окружности найти координаты центра и радиус.

б) Всякое уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

выражает прямую линию. Доказать это можно, приводя уравнение к виду (см. выше)

$$2(a - a_1)x + 2(b - b_1)y + a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2 = 0,$$

т. е. рассматривая искомую прямую как ось симметрии двух точек, что можно сделать на бесчисленное множество ладов²⁾.

Именно взаимодействие задач 1-го и 2-го рода создает силу координатного метода, которую уже теперь можно демонстрировать на ряде задач, где геометрическим местом является прямая или окружность

¹⁾ Такое уравнение, как, например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, не удовлетворяется никакими вещественными значениями x и y , следовательно, не принадлежит никакой линии. О мнимых геометрических элементах в нашем курсе, конечно, не может быть речи.

²⁾ Задача сводится к решению системы трех уравнений

$$2p(a - a_1) = A, \quad 2p(b - b_1) = B, \quad p(a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2) = C$$

с пятью неизвестными a, b, a_1, b_1, p при дополнительном требовании $(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 \neq 0$ [точки (a, b) и (a_1, b_1) не совпадают]. Простыми преобразованиями система приводится к виду

$$\begin{cases} Aa_1 + Bb_1 = 2C - Aa - Bb, \\ -Ba_1 + Ab_1 = -Ba + Ab, \end{cases}$$

откуда видно, что можно произвольно задаться значениями a и b , после чего a_1 и b_1 однозначно (в силу $A^2 + B^2 \neq 0$) определяются, и точка (a_1, b_1) не совпадает с (a, b) , если только $Aa + Bb + C \neq 0$.

(один из поучительных примеров — «аполлониева окружность»¹⁾). Ученик должен ощутить, насколько он теперь лучше вооружен при решении таких задач, которые могли бы быть поставлены перед ним и до изучения аналитической геометрии. (Пример: по какой линии должна двигаться точка для того, чтобы сумма квадратов ее расстояний от вершин данного прямоугольника оставалась постоянной? — задача не из легких, если ограничить себя элементарными методами, но без всяких усилий решаемая средствами аналитической геометрии.) Вслед за этим большинство учебников переходит к детальному изучению посредством уравнений отдельных типов линий: прямая, окружность, эллипс, гипербола, парабола. Если в университетских курсах такая последовательность оправдывается тем, что теория кривых 2-го порядка доводится до большой полноты и завершает аналитическую геометрию на плоскости, то в нашем случае возможен и даже, по-видимому, предпочтителен другой порядок. После того как сила координатного метода продемонстрирована на задачах привычного содержания (прямая и окружность), показываем, как этот же метод делает доступным изучение новых (или известных только по названию) линий. Канонические уравнения параболы ($y^2 = 2px$), эллипса ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), гиперболы ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$) выводятся из их фокальных свойств. Впрочем, в случае эллипса представляется в высшей степени желательным, чтобы фокальному определению предшествовало рассмотрение эллипса как кривой, получаемой из окружности преобразованием «осевого растяжения-сжатия»²⁾ (откуда получается и наиболее простой вывод канонического уравнения). Гипербола дает повод обогатить геометрическое развитие ученика важным понятием — асимптотического приближения (желательно привести и другие примеры — тангенсоида и пр.). Поскольку известны формулы преобразования координат при параллельном переносе осей, не представляет труда написать уравнения трех кривых соответственно в виде

$$(y - k)^2 = 2p(x - h), \quad \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

(первое связать с графиком квадратного трехчлена), что даст возможность определять тип любой кривой, заданной уравнением

$$mx^2 + ny^2 + px + qy + r = 0$$

(при этом поучительным образом появится пара прямых как линия 2-го порядка). Интерес к этим кривым можно стимулировать многочисленными примерами появления их в природе и технике³⁾.

¹⁾ См. учебник Я. С. Дубнова, § 20.

²⁾ При разумном построении курса геометрии это преобразование и связанное с ним определение эллипса должны появиться значительно раньше (в VIII — IX классах).

³⁾ См. учебник Я. С. Дубнова, § 28.

Теперь своевременно расширить сферу действия координатного метода в двух направлениях:

1) На примере эллипса ($x = a \cos u$, $y = b \sin u$ следует познакомиться с «параметрическим заданием кривой», которое, например, в механике имеет преобладающее значение. Параметрические уравнения эллипса можно связать как со сложением гармонических колебаний, так и с поучительным чертежным прибором «эллиптическим циркулем»¹⁾.

2) Даже при минимальном объеме курса, желательно не создавать у начинающего такое впечатление, будто декартова прямоугольная система является единственной реализацией идеи координат. После беглого упоминания о косоугольной системе следует остановиться подробнее на полярных координатах и воспользоваться ими для знакомства с некоторыми типами спиралей (архимедова, логарифмическая, гиперболическая).

6. Прямая и окружность. Точечные преобразования. Первый цикл задач, относящихся к прямой линии, имеет целью показать, как составляется уравнение этой линии по наиболее естественным данным: 1) по точке и подъему; 2) по начальной ординате и подъему; 3) по двум точкам; 4) по начальной абсциссе и начальной ординате²⁾.

Мы не включили в этот перечень «нормального уравнения» ($x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$), так как усилия, требующиеся для его вывода, а позже для «приведения уравнения 1-й степени к нормальному виду», не оправдываются возможными в нашем курсе приложениями³⁾.

Второму циклу задач предпосылается важная теорема: *всякое уравнение 1-й степени* (вида $Ax + By + C = 0$, где A и B не равны одновременно нулю) выражает некоторую прямую; доказательство основывается на приведении этого уравнения к одному из видов, полученных при решении задач первого цикла (впрочем, каждый раз приходится рассматривать исключительный случай; другое доказательство намечено в этой статье выше, стр. 40). Теперь можно для двух прямых, заданных своими уравнениями, искать точку пересечения (задача, эквивалентная решению и исследованию двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными, чем обычно занимаются в курсе алгебры), угол между прямыми, решать ряд задач с применением условий параллельности или перпендикулярности прямых и т. п.

О прямой и обратной задачах, связанных с уравнением окружности, мы уже говорили. Остается присоединить сюда вопросы взаимного расположения прямых и окружностей, в частности задачи касания.

Теперь вся известная ученику область планиметрии становится принципиально доступной для исследования методом координат. Не

¹⁾ См. учебник Я. С. Дубнова, § 28.

²⁾ Там же, § 29.

³⁾ Задача «найти расстояние точки от прямой», ради чего главным образом и вводится нормальное уравнение, разрешима и другими средствами (см., например, § 32, п. 3 учебника Я. С. Дубнова).

следует жалеть времени на задачи, которые формулируются в терминах элементарной геометрии, но наилучшим образом решаются средствами аналитической (например, большинство задач на отыскание геометрических мест, особенно в тех случаях, когда они сводятся к прямым или окружностям).

Внушительным завершением курса было бы обращение к одной из руководящих идей современной геометрии — точечному преобразованию — в координатной трактовке. Эта объединяющая идея, к сожалению, недостаточно представлена в традиционном преподавании. Оставаясь всё время в пределах планиметрии, мы имеем там дело исключительно с «коллинеациями», т. е. преобразованиями, сохраняющими прямолинейное расположение точек; среди них — в первую очередь с «конгруэнтными преобразованиями» (трансляция, вращение, симметрии осевая и центральная) и с одним только неконгруэнтным: центральное растяжение-сжатие, или гомотетия. Сюда следовало бы присоединить другое неконгруэнтное преобразование: «осевое растяжение-сжатие», о котором мы уже упоминали в связи с преобразованием круга в эллипс. В координатах эти преобразования выражаются формулами, вывод которых не представляет затруднений:

$$x' = x + h, y' = y + k \text{ (трансляция);}$$

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \text{ (вращение на угол } \alpha \text{ около начала координат);}$$

$$x' = x, y' = -y \text{ (симметрия относительно оси } Ox);$$

$$x' = -x, y' = -y \text{ (симметрия относительно начала координат);}$$

$$x' = x, y' = \lambda y \text{ (растяжение-сжатие относительно оси } Ox);$$

$$x' = \lambda x, y' = \lambda y \text{ (гомотетия с центром в начале координат).}$$

Не только свойства каждого из этих преобразований в отдельности (например, свойство преобразовывать прямую в прямую), но и их взаимоотношения (например, возможность заменить центральное растяжение-сжатие двумя осевыми) получаются из написанных выше формул совершенно непосредственным образом.

Представляется также желательным дать пример неколлинеарного преобразования, скажем, «инверсии», из геометрического определения которой легко получается:

$$x' = a^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, y' = a^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Пользуясь этими формулами, без труда выясняем, как действует преобразование инверсии на прямые и окружности. Более углубленное изучение этого преобразования может быть темой кружковых занятий¹⁾.

¹⁾ В связи с этим следует отметить, что для занятий школьного кружка наш курс в изобилии доставляет темы: синтетические теории (планиметрическая и стереометрическая) эллипса, гиперболы и параболы; оптические свойства этих кривых; общее для них определение с помощью фокуса и директрисы и т. д. (см., например, Ж. Адамар, *Элементарная геометрия*, ч. II, Учпедгиз 1938, стр. 502—561 и 757—798).

Если удастся присоединить сюда несколько примеров¹⁾, вводящих в идею «инвариантности» функций или уравнений относительно данной «группы преобразований», то будет сделан важный шаг в сторону приближения к современной науке (с этими понятиями учащийся встретится, например, при чтении научно-популярной литературы по теории относительности).

III. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

7. Содержание и структура курса. Те общие соображения, которые были высказаны в п. 4 по поводу содержания (стр. 31) и уровня изложения (стр. 32—33) аналитической геометрии, относятся в равной мере к школьному курсу анализа. Однако задача отбора материала для этого курса становится более сложной вследствие обширности предмета и разнообразия его приложений. Необходимо избежать ошибки нашей дореволюционной и ряда зарубежных школ, строивших свои программы под лозунгом «всё дифференцировать и кое-что интегрировать». Этот максимализм мог быть осуществлен только за счет вульгаризации изложения и формального усвоения предмета учащимися. С другой стороны, надо показать руководящие идеи анализа в действии, а для этого необходим некоторый минимальный инструментарий. Поэтому мы не можем согласиться ни с предложением комиссии П. Н. Игнатьева²⁾ совершенно отказаться в средней школе от интегрального исчисления, ни с тем ничтожным запасом средств дифференцирования, который дан в советском издании учебника А. Киселева³⁾ (дифференцируются только функции $ax + b$ и ax^n при $n = 2, 3, -1$). Заметно содержательнее проект программы средней школы, составленный Институтом методов обучения Академии педагогических наук⁴⁾: умение дифференцировать полином любой степени и функции $\sin mx$, $\cos mx$ открывает возможность показать приложения к исследованию хода изменения функций, к геометрии и физике, решать задачи на отыскание максимумов и минимумов (одно из эффектнейших применений дифференцирования — к сожалению, не упомянутое явно в этой программе). Небольшое усиление техники дифференцирования (производные от степени с целым отрицательным показателем, от квадратного корня, от сложной функции), включение в курс теорем Ролля и Лагранжа, наконец, определенного интеграла, рассматриваемого как предел суммы (важнейшая для естествознания идея анализа), сделали бы эту программу полнокровной и в то же время оставили бы ее легко реализуемой. По сравнению с дореволюционным курсом и даже с советским учебником И. И. Привалова и С. А. Гальперна это означало бы отказ от числа e и натуральных логарифмов, от диффе-

¹⁾ Ср., например, учебник Я. С. Дубнова, стр. 128—129 (2-го издания).

²⁾ См. выше, стр. 26.

³⁾ А. Киселев, Элементы алгебры и анализа, ч. II, изд. 3-е. ГИЗ, 1928.

⁴⁾ См. стр. 27.

ренцирования степени с любым показателем, а также функций логарифмической, показательной, обратных тригонометрических и в связи с этим — почти полное изъятие техники интегрирования.

Вместе с тем определяется и структура курса. В противоположность университету, где с полным основанием начинают изучение анализа с теории вещественных чисел¹⁾, средняя школа едва ли может позволить себе роскошь развить эту трудную теорию до уровня, существенно превышающего то, что излагалось в младших классах. Такая попытка грозила бы не только значительно отодвинуть знакомство с анализом, но и ослабить интерес к нему у большинства учащихся. Впрочем, за отказ от этой теории мы вынуждены будем позже расплачиваться необходимостью принимать некоторые предложения без доказательства, с чем, однако, можно мириться, если только мы не создаем иллюзии доказательства.

Необходимым и в то же время доступным введением в предмет является анализ понятий «функция» и «предел». За этим следует операция дифференцирования с ее разнообразными и импонирующими применениями. Курс заканчивается знакомством с определенным и неопределенным интегралом, что снова дает пищу для поучительных приложений.

Последующая часть статьи содержит детализацию этой программы.

8. Функция. Предел. С этими понятиями учащиеся уже встречались не раз. Однако, приступая к изучению элементов анализа, мы должны вернуться к фундаментальным для него понятиям с целью уточнить и углубить их содержание.

Идея *функции*, сопутствующая анализу с первых его шагов, прошла длинный путь, прежде чем достигла своего современного оформления. Для Эйлера (XVIII в.) «функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное как-либо из этой переменной и постоянных чисел или же величин». В силу этого определения («оперативного») функция задана, если известно, какие операции надо произвести над значением независимого переменного для того, чтобы получить соответствующее значение функции. Здесь многое остается неясным, и прежде всего смысл термина «операции»; конечно, можно их просто перечислить (например, четыре рациональных действия, затем операции, приводящие к функциям: степенной с любым вещественным показателем, показательной и логарифмической с положительным основанием, тригонометрическим и обратным им), но тогда

¹⁾ См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Гостехиздат, 1947, Введение. (В этом руководстве особое внимание уделено пределам последовательностей; для последних вводится, следуя Мерзэ, специальный термин «*варианта*», гл. 1, стр. 50—107. Много хорошо подобранных примеров, доступных ученику старшего класса.) А. Я. Хинчин, Восемь лекций по математическому анализу (изд. 2-е, ГТТИ, 1946), Лекция 1, первый пункт которой имеет заголовок «Почему математический анализ должен начинаться с изучения континуума?». (Для нас наибольший интерес представляют лекции 2 и 3 — пределы и функции.)

определение может оказаться слишком узким. Так, при только что приведенном перечне дозволённых операций пришлось бы отказаться от рассмотрения функций, определяемых равенствами:

$$y = |x| \quad \text{или} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

Далее, перечисленные операции не всегда выполнимы — во всяком случае, если не выходить из области вещественных чисел, как это обычно делается в элементарном изложении (примеры $\frac{1}{x-2}$ или $\sqrt{1-x^2}$ или $\arcsin x$ при $x=2$); значит, мы должны каждый раз выяснять «область определения функции», т. е. совокупность (множество) тех значений, которые мы вправе приписывать независимому переменному. Наконец, результаты некоторых операций (извлечение корня, обратные тригонометрические функции) многозначны, — в этих случаях надо договориться, рассматриваем ли мы все значения функции или же по какому-нибудь признаку выделяем одну «ветвь функции», например «главное значение» обратной тригонометрической функции¹⁾.

Другой особенностью старого взгляда на функцию была существенная роль «переменного» [числа, количества²⁾]. До сих пор авторы многих учебников считают подходящим введением в изучение функций фразу вроде: «в математике рассматривают величины двоякого рода: постоянные и переменные». К расплывчатости, сопутствующей термину «величина», здесь присоединяется интуиция изменения и постоянства с течением времени — ход мысли, берущий начало от ньютоновых флюэнт и флюксий³⁾. Верно то, что изменение с течением времени таких величин, как путь, скорость и т. п., доставляет нам простые и наглядные примеры функций — обстоятельство, которым педагог не преминет воспользоваться; однако нет никаких оснований (и никакой необходимости) подчинять математическое понятие функции физическому — времени. Поэтому современная трактовка функции обходится без понятия «переменного» (а если вводить этот *термин*, то несущественным образом, как дань словоупотреблению, еще до сих пор широко распространенному), выдвигая на передний план в качестве первичных понятий «множество» и «соответствие».

Если ограничиться для простоты функциями с числовым аргументом и числовыми значениями, то в современном понимании *функцией*

¹⁾ Большинство педагогов предпочитает (в вещественной области) рассматривать многозначную функцию как совокупность однозначных. Иная точка зрения представлена в статье А. И. Маркушевича «Понятие функции», Математика в школе, 1947, № 4.

²⁾ У иных авторов — «переменной» (величины). Нам представляется, что после того как в преподавании утвердился оборот речи «уравнение с одним неизвестным» (а не «одной неизвестной»), единство стиля заставляет предпочесть «переменное».

³⁾ См. И. Ньютон. Сборник статей к трехсотлетию со дня рождения, Изд. АН СССР, 1943, статья Н. Н. Лузина.

(одного аргумента) называется правилом, в силу которого каждому числу из заданного множества («область задания») ставится в соответствие некоторое число («значение функции»). Так, например, формула $y = x^3$ ставит в соответствие каждому числу x число y , равное произведению трех множителей, из которых каждый есть x ; за область задания здесь можно принять множество всех (вещественных) чисел или любую часть этого множества. Таким образом, функция определяется двумя характеристиками: 1) правило соответствия, 2) область задания¹⁾.

Последняя «почти» не зависит от первого с единственным ограничением: в область задания не должны входить такие числа, к которым наше правило соответствия неприменимо. Например, если функция определена только формулой

$$y = \frac{1}{(x-2)(x-7)},$$

то в область задания не должны входить числа 2 и 7; в остальном она совершенно произвольна, например, это может быть вся числовая прямая, из которой исключены точки 2 и 7 («максимальная область задания») или промежуток $2 < x \leq 5$ и т. п. Если об области задания ничего не сказано, то возникает вопрос о нахождении максимальной области, а именно так надо понимать традиционные задачи вроде: найти область задания функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ при вещественных x и y (ответ: $-2 \leq x \leq 2$).

Сравнивая «оперативное» определение Эйлера с только что рассмотренным, можно заметить, что они не так уж далеко отстоят одно от другого. Если отвлечься от «области задания» (которую в случае оперативного определения понимают как максимальную), то стоит только расширить смысл термина «операция» настолько, чтобы он охватывал любое правило преобразования одного числа в другое независимо от того, выражено ли это правило одной или несколькими формулами или описано словами, и различие исчезнет.

В средней школе круг рассматриваемых функций настолько ограничен, что казалось бы можно удовлетвориться узким оперативным определением. Однако общее определение (понятно, мы не настаиваем на приведенной выше его редакции) имеет настолько очевидное преимущество простоты, соединенной с исчерпывающей полнотой, что,

¹⁾ Стоя на этой позиции, мы в сущности должны были бы определить, какое содержание вкладывается в выражение «сумма, произведение ... функций», так как вовсе не ясно, что, например, означает «сумма двух правил» и т. п. Если этого, однако, не делают даже в серьезных руководствах [как на редкое исключение укажем на лекции К. Менгера (K. Menger, Algebra of Analysis, Notre Dame Math. Lectures, n° 3, 1944)], то, вероятно, потому, что сама математическая символика подсказывает, что под суммой, например, функций $y = x^3$ и $z = x^2$ естественно разуметь функцию $u = y + z = x^3 + x^2$. Тем меньше оснований преподавателю средней школы брать на себя инициативу в постановке этих тонких вопросов; но он должен быть готов к таким вопросам со стороны вдумчивого ученика.

его следует предпочесть. После того как это определение формулировано, пояснено на достаточно разнообразных примерах и связано с графическим изображением, в дальнейшем мы почти всегда будем иметь дело с функциями, заданными формулой, причем круг операций, входящих в состав этой формулы, будет постепенно расширяться («элементарные» функции, затем предельный переход, дифференцирование, интегрирование). Конечно, при этом функциональная символика должна быть развернута с достаточной полнотой: в результате специальных упражнений и постоянного применения такие символы, как $f(x)$, $F(x, y)$, $f(3)$, $f[\varphi(x)]$, должны стать для ученика привычными¹⁾.

С другим основным понятием анализа — *пределом функции* («пределом переменного» в старой терминологии) ученик знаком в частной и наиболее доступной форме *предела последовательности* (суммирование членов бесконечной убывающей прогрессии, площадь круга как предел последовательности площадей правильных многоугольников и т. п.). Мы назвали эту форму *частной* потому, что n -й член последовательности a_n есть не что иное, как функция натурального аргумента (n) с областью задания (1, 2, 3, ...), а единственно возможный здесь предельный переход состоит в неограниченном возрастании n (условная запись $n \rightarrow \infty$). Возвращая внимание учеников к примерам последовательностей, имеющих предел, мы в состоянии, — именно потому, что это понятие не является новым, — подняться от прежнего определения²⁾ к более точному: *число A называется пределом последовательности a_n , если для любого положительного ϵ , сколь бы малым оно ни было³⁾, можно указать такое N , что $|a_n - A| < \epsilon$ для всех значений n , удовлетворяющих неравенству $n > N$* . Эта формулировка, подготовляющая к «эпсилон-определению» предела в более общем случае $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, может быть связана с ранее усвоенным решением неравенств. Для этого достаточно рассматривать проверку соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ как задачу: для неравенства $|a_n - A| < \epsilon$ с известным n найти частичное решение⁴⁾ вида $n > N$.

Нетрудно подобрать достаточное число примеров, где задача этого рода может быть доведена учащимся до конца, причем поучительным

¹⁾ Не можем поддержать обычая знакомить в самом начале с классификацией функций, доведенной до разделения их на алгебраические и трансцендентные. Корректное проведение этой классификации требует усилий, не оправдываемых необходимостью. Впрочем, для школьного кружка эта тема вместе с доказательством трансцендентности таких функций, как $\sin x$, 2^x , представляется и доступной и благодарной.

²⁾ Например, такого: число A называется пределом последовательности, если члены ее отличаются от A сколь угодно мало, начиная с некоторого места.

³⁾ Эта вставка, будучи излишней логически, не лишена психологического значения и потому педагогически оправдана.

⁴⁾ Под частичным решением мы понимаем здесь такое, которое охватывает не обязательно все значения неизвестного, удовлетворяющие неравенству.

образом обнаружится зависимость числа N от ϵ , а также от параметров, которые могут входить в выражение $a_n^{(1)}$.

В других случаях для предела последовательности довольствуются «доказательством существования», основанным на лемме о монотонной ограниченной последовательности. Эта лемма, содержание которой хорошо известно ученику из курса геометрии ²⁾, будет, по-видимому, и здесь принята без доказательства, так как оно опирается на теорию иррациональных чисел более развернутую, чем обычно излагаемая в школе.

От предела последовательности легко перейти к пределу функции: предполагая, что функция $f(x)$ задана во всех точках некоторого промежутка, за исключением, может быть, точки a , число A называют *пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a* [пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$], если для любой последовательности $(x_n)^3$, имеющей пределом a , последовательность соответствующих значений функции стремится к пределу A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (4)$$

Важно подчеркнуть, что соотношение $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ гарантировано только в том случае, если (4) выполняется для *любой* сходящейся к a последовательности, лишь бы члены ее принадлежали к области задания функции. (например, при $x \rightarrow 0$ функция $\sin \frac{1}{x}$ не стремится ни к какому пределу, несмотря на то, что при $x_n = \frac{1}{n\pi}$ последовательность $\sin \frac{1}{x_n}$ состоит из нулей и, значит, имеет пределом нуль).

Как ни соблазнительно свести новое и сложное понятие к ранее известному и более простому, однако нельзя ограничиться только что приведенным определением предела функции, которое более приспособлено к доказательству отсутствия предела, чем к проверке соотношения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Формулируем другое определение (сравните определение предела последовательности на стр. 48 и относящуюся к нему сноску): *число A называется пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , если при любом положительном ϵ , сколь бы малым оно ни было, можно найти для неравенства*

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad (x \text{ — неизвестное})$$

частичное решение вида

$$0 < |x - a| < \delta.$$

¹⁾ Ср. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, ГТТИ, 1947, стр. 57 и след.

²⁾ Алгебраические примеры см. там же, стр. 87 и след.

³⁾ Конечно, при этом предполагается, что числа x_n принадлежат к области задания функции $f(x)$.

Например, $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$, потому что достаточно взять в качестве δ меньшее из чисел 1 и $\frac{1}{7}\epsilon$ для того, чтобы было $|x - 3| < \frac{1}{7}\epsilon$, $|x + 3| < 7$; следовательно, $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Если даны оба определения, то эквивалентность их, по-видимому, должна быть принята без доказательства.

Мы не останавливаемся на *условных* записях, отличающихся от прежнего тем, что вместо чисел a или A стоят символы $+\infty$ или $-\infty$; во всех этих случаях смысл соотношения должен быть определен особым, но принципиально нового здесь нет¹⁾.

На практике отыскание предела производится обычно с помощью теорем о пределах (суммы и разности, произведения и частного двух функций). По поводу этих привычных теорем отметим только два варианта изложения. Иногда предпосылают им леммы о бесконечно малых, т. е. о функциях, стремящихся к нулю (сумма бесконечно малых, произведение бесконечно малого на ограниченную функцию); затем доказывают теоремы о пределах, опираясь на то, что разность между функцией и ее пределом есть бесконечно малое. В других случаях излагают сразу теоремы о пределах, справедливо замечая, что здесь уже содержатся леммы о бесконечно малых. При этом указывают на нежелательность самого термина «бесконечно малое», действительно неудачного и отражающего детский возраст анализа. В этом методическом споре не хватает данных относительно того, с какой целью вводится понятие бесконечно малого. Если только для того, чтобы облегчить доказательство теорем о пределах, то действительно следует подумать, прежде чем идти на такое расчленение доказательств, и без того нетрудных. На самом же деле понятие это становится ценным само по себе (и не только в историческом аспекте, который, заметим, также нельзя игнорировать в преподавании), если рассмотреть сравнение бесконечно малых по их *порядкам малости* и, в особенности, ввести понятие об *эквивалентности* (по определению, бесконечно малые α и β эквивалентны, если $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$; в символической записи $\alpha \sim \beta$). Уже знакомство с такими эквивалентностями, как $\sin \alpha \sim \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$, $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$, $\frac{1}{1 - \alpha} - 1 \sim \alpha$, $\sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{1}{2}\alpha$,

существенно облегчает отыскание пределов и дает повод заняться несколькими важными приближенными формулами, применяемыми при вычислениях с малыми величинами.

Завершением этой главы курса служит определение *непрерывности* функции, которое не представляет уже трудности, если усвоены по-

¹⁾ О том, как все случаи объединяются с помощью понятия «окрестности», можно прочитать в лекции 2 книги А. Я. Хинчина «Восемь лекций по математическому анализу».

нятия функции и предела: функция $f(x)$ непрерывна при $x=a$, если:
 1) число a принадлежит к области задания; 2) существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Вслед за исследованием элементарных функций с точки зрения их непрерывности надо рассмотреть несколько примеров разрывов, не ограничиваясь при этом случаем так называемого «бесконечного разрыва» $\left(\frac{1}{x}, \operatorname{tg} x \text{ и т. п.}\right)$. Можно использовать для этой цели пределы некоторых последовательностей, состоящих из непрерывных функций, например функцию, определяемую для всех значений x формулой $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$.

9. Производная и дифференциал. Исторически дифференциальное исчисление возникло из нескольких задач, среди которых «задача о касательной» со времен Декарта приобрела следующее содержание: *найти общий метод построения касательной к кривой, заданной своим уравнением*. Если говорить о простейших уравнениях вроде $y=ax^2$, то, в самом деле, геометрическая интуиция настолько действенным образом подкрепляет здесь и постановку задачи и ее решение, что следует признать педагогически оправданным обычай связывать воедино первое знакомство с производной и задачу о касательной. Выигрышные стороны этого параллельного рассмотрения настолько бесспорны, что не раз предлагалось вводить понятие о производной как о подъеме кривой (т. е. подъеме касательной к кривой) значительно раньше, чем начинается систематическое изучение начал анализа. Теперь нас интересует именно старшая ступень обучения, и здесь надо предостеречь от подмены аналитически определяемой производной ее геометрическим образом, который при ближайшем рассмотрении оказывается не столь уж простым. Во всяком случае при определении касательной должен быть точно разъяснен смысл термина «предельное положение секущей», так как из знакомого ученику понятия предела этот смысл вовсе не вытекает. Если понимать это выражение так, что угол, образуемый касательной с секущей и рассматриваемый, например, как функция абсциссы, стремится к нулю, то необходимо, чтобы именно такое понимание работало в последующих рассуждениях¹⁾. В дальнейшем часто прибегают к этой геометрической модели, когда желают иллюстрировать дифференциальные свойства функций, — прием, не вызывающий сомнений, если только эти иллюстрации не выдаются за доказательства.

¹⁾ Некоторое представление о возникающих здесь трудностях и способах их преодоления (выходящих за рамки школьного преподавания) читатель может получить по книге: М. К. Гребенча и С. И. Новоселов, Курс математического анализа, 1, Учпедгиз, 1941 (книга предназначена для будущих педагогов и проникнута стремлением углубить и модернизировать трактовку основных понятий анализа), §§ 71 и 72; изложение в этой книге достаточно сложное.

После того как геометрическая задача дала к этому повод, формулируется обычным образом определение *производной (функции)*¹⁾ или же сначала *производного числа*, причем желательно, чтобы ученик овладел несколькими записями:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

За этим должны последовать достаточно разнообразные примеры реализации нового понятия: 1) в механике (кинематике) — скорость и ускорение в прямолинейном движении, угловая скорость вращения вокруг оси; 2) в физике — плотность (линейная), теплоемкость, коэффициент расширения (линейного) и т. п. Здесь преследуются две педагогические цели: 1) дать представление о диапазоне применения понятия производной в естествознании; 2) оторвать в сознании ученика понятие о производной от геометрической модели как единственной.

Объем техники дифференцирования (вычисления производных) был уже намечен выше (п. 7). Отправляясь от определения, непосредственно находим производные для функций x^n (n — натуральное число), $\frac{1}{x}$, \sqrt{x} , $\sin x$, $\cos x$.

В соединении с теоремами о производных (суммы, произведения, частного, сложной функции) эти формулы открывают уже доступ к решению широкого класса задач. Из перечисленных теорем спорной (с точки зрения режима строгой экономии) может показаться, пожалуй, теорема о дифференцировании сложной функции. Однако, если от нее отказаться, то: 1) ученик окажется не в состоянии дифференцировать ни $(ax+b)^5$, ни $\sin(ax+b)$ (физика!) или вынужден будет делать это кустарным способом; 2) исчезнет единственное доступное в нашем курсе оправдание для появления дифференциала (о нем — ниже).

К той же категории вынужденных расширений программы относятся включение в курс теоремы Лагранжа о среднем:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b,$$

с обычно предпосылаемой ей теоремой Ролля. Доказательства должны быть максимально упрощены, пусть даже ценой ограничения общности

¹⁾ Если хотят сразу ввести понятие о производной как о функции, то следует начать с функции двух переменных и рассмотреть (с несколькими упражнениями) предельный переход по одному из этих переменных: $\lim_{x \rightarrow a} F(x, y) = \varphi(y)$.

После этого схема построения производной $f'(x)$ представляется в следующем виде: 1) из функции $f(x)$ одного переменного образуем функцию двух переменных $f(x+h) - f(x)$; затем 2) функцию тех же переменных $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (заметим, не определяемую этой формулой для $h=0$); наконец, 3) переходим к пределу при $h \rightarrow 0$, что дает снова функцию одного переменного.

(например, при допущении непрерывности производной в теореме Ролля) или принятия на веру некоторых свойств непрерывных функций. Усилия, затраченные на вывод теоремы о среднем, окупятся при изложении признаков возрастания-убывания, максимума-минимума, на чем основано исследование хода изменения функции — важнейшее приложение анализа в нашем курсе. Не менее существенно то, что без теоремы о среднем мы лишимся наиболее простого доказательства фундаментальной для интегрального исчисления теоремы: две функции с общей производной отличаются только постоянным слагаемым.

Спорным является вопрос о включении в программу понятия о *дифференциале*. Появляясь в конце курса (против более раннего срока говорит обоснованное нежелание педагога распылять внимание начинающего усвоением двух параллельных символов), это понятие воспринимается учащимися как ненужное усложнение, ничего не меняющее в существе дела. Только длительная практика, каковой в школе не будет, постепенно побеждает антипатию к дифференциалу¹⁾. С другой стороны, игнорирование дифференциала закрыло бы перед нами возможность сообщить о важных для истории науки фактах; в частности, мы затруднимся даже объяснить происхождение символа $\int f(x) dx$, с которым ученику неизбежно предстоит встретиться.

Остается сказать несколько слов о подборе *задач* для этой части курса. В соответствии с общим его направлением, очень скромная роль должна быть отведена упражнениям, посвященным чистой технике дифференцирования. Что касается текстовых задач, то педагогическая проблема заключается здесь не в подыскании таких задач, а наоборот, в отборе их из чрезвычайного обилия доступных и поучительных. Наряду с умеренным числом задач на вычисление скоростей и нахождение касательных к знакомым кривым (благодарный случай для контакта с аналитической геометрией) следует главное внимание уделить текстовым задачам на отыскание максимумов и минимумов (а также наибольших значений в замкнутом промежутке), вообще — задачам, требующим исследования хода изменения функции (промежутки возрастания и убывания, построение графиков с учетом их дифференциальных свойств). Эти задачи настолько импонируют ученику, что они сами по себе способны оправдать в его глазах затраченные усилия.

¹⁾ Это явление, наблюдаемое и в высшей школе, имеет психологическим источником то обстоятельство, что в нашем преподавании производная появляется как первичное и притом совершенно отчетливое понятие (предел отношения), в то время как дифференциал определяется не непосредственно, а через производную с привлечением осложняющих понятий (главная часть, функция двух переменных). При этих обстоятельствах нам представляется интересной методической и экспериментальной задачей попытка перевернуть этот порядок: определить дифференциал как первичное понятие и именно как предел по образцу Коши:

$$df(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} \quad (h = dx).$$

При этом производная появится в качестве вторичного понятия: $f'(x) = [df(x)]dx = 1$.

10. Интеграл. Старый методический спор о том, начинать ли изучение интегрального исчисления с *неопределенного интеграла*

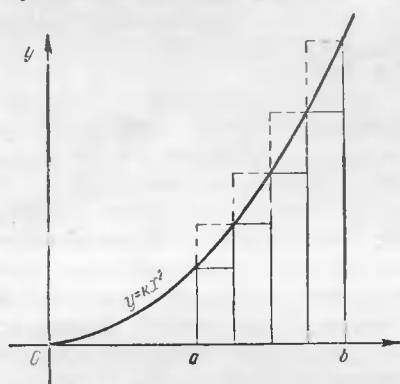


Рис. 3.

(т. е. с обращением задачи дифференцирования) или же с *определенного* (предел интегральной суммы), теряет здесь свою остроту. В самом деле, преподавание этих вещей в средней школе должно ограничиться настолько скромным объемом и таким коротким отрезком времени, что оба понятия могут быть введены одновременно и в дальнейшем рассматриваться параллельно. Наметим один из вариантов такого изложения.

Исходим из конкретной геометрической задачи, например: найти площадь «криволинейной

трапеции», ограниченной отрезком оси x , дугой параболы $y = kx^2$ и двумя ее ординатами (остальные обозначения показаны на рис. 3). Строим обычным способом интегральную сумму $S_n = kh \{ na^2 + 2ah(1 + 2 + \dots + n - 1) + h^2[1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2] \}$ (где $hn = b - a$) и после легких преобразований [с привлечением формулы $1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{1}{6} n(n - 1)(2n - 1)$] находим: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_k = \frac{k}{3} (b^3 - a^3)$.

Другое решение той же задачи получим, рассматривая площадь криволинейной трапеции как функцию (пока неизвестную) $S(x)$ абсциссы x [с областью задания $x \geq a$ при естественном соглашении $S(a) = 0$]; если удастся найти эту функцию, то искомая площадь будет $S(b)$. Общеизвестным способом (рис. 4) устанавливаем, что

$$S'(x) = y = kx^2.$$

Теперь перед нами типичная задача интегрального исчисления: найти функцию, зная ее производную. В данном случае легко подбираем частное решение $S(x) = \frac{1}{3} kx^3$, а отсюда общее $S(x) = \frac{k}{3} x^3 + C^1$. Постоянное C определяется из условия $S(a) = 0$ и дает $S(x) = \frac{k}{3} (x^3 - a^3)$, откуда $S(b) = \frac{k}{3} (b^3 - a^3)$, т. е. тот же результат. Учащийся оценит преимущества этого решения по сравнению с

¹⁾ Мы видим, таким образом, что упомянутая выше (стр. 53) теорема о двух функциях с общей производной имеет здесь решающее значение. Попытки обойти эту теорему вызывают серьезный логический пробел (например, в учебнике А. Киселева, *Элементы алгебры и анализа*, ч. II, изд. 5-е, ГИЗ, 1928, §§ 377, 379).

первым и легко воспримет обобщение: если площадь криволинейной трапеции рассматривать как функцию наибольшей абсциссы, то производная этой функции совпадает с функцией, выражающей ординату кривой через абсциссу¹⁾.

Теперь учащийся подготовлен к восприятию: 1) определенного интеграла как предела суммы $\left[\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right]$;

2) неопределенного интеграла как примитивной (первообразной) функции $[F(x) = \int f(x) dx]$ — другая запись равенства $F'(x) = f(x)$. Всё

это должно быть иллюстрировано на примерах, заимствованных из разных областей: выражения для пути через скорость, для скорости через ускорение; для массы неоднородного стержня через плотность (линейную); для объема тела вращения через площадь параллельного круга и др. В качестве доступных приложений укажем на вывод формул для пути и скорости в равномерном движении, для объемов круглых тел и их частей (кроме тел, обычно рассматриваемых в элементарной геометрии, заслуживает внимания сегмент параболоида вращения со ссылкой на Архимеда).

При этом не предполагается никаких специальных приемов интегрирования (ни «по частям», ни «заменой переменного») — все задачи должны быть таковы, чтобы интегрирование могло быть выполнено «по соображению», на основе известных ученику формул дифференцирования (примеры максимальной трудности: $\int \frac{dx}{(2x-3)^3}$, $\int \sin\left(\frac{2}{3}x + 5\right) dx$, требующие «подбора с поправками»).

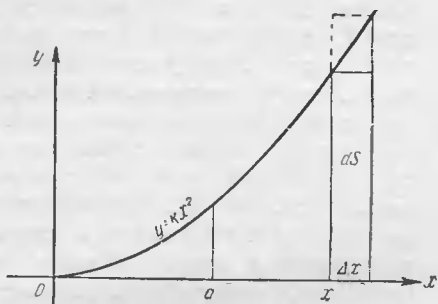


Рис. 4.

В настоящий момент не существует еще окончательной обязательной программы для курса анализа и аналитической геометрии в общеобразовательной школе. Изложенный здесь вариант учитывает как опыт старой школы, так и тенденции современной.

¹⁾ Ни в коем случае нельзя рассматривать этот результат как *доказательство существования* интеграла; наоборот, на существовании интеграла для некоторого класса функций основано наше право приписывать площадь фигурам соответствующего класса.

МОДЕЛЬ КЛЕЙНА И МОДЕЛЬ ПУАНКАРЕ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Многим, вероятно, известны две модели, позволяющие, исходя из обычной («школьной») геометрии Евклида, представить себе неевклидову геометрию Лобачевского: модель Клейна и модель Пуанкаре. В обеих моделях под «точками» плоскости Лобачевского понимаются точки внутренности, скажем единичной, окружности Σ , но на этом их сходство исчерпывается: в модели Клейна неевклидовы «прямые» изображаются хордами Σ , а в модели Пуанкаре — дугами окружностей, пересекающих Σ под прямым углом¹⁾; в модели Пуанкаре «углы» между «прямыми» понимаются как обыкновенные углы между соответствующими дугами, а в модели Клейна «угол» между «прямыми» определяется более сложно. Различие между этими двумя моделями заставляет в разных случаях обращаться то к одной, то к другой из них: если нас интересуют факты неевклидовой геометрии Лобачевского, связанные с прямыми и их расположением, то естественно прибегнуть к модели Клейна, на которой очень просто изображаются неевклидовы прямые; в случае же, если нас интересуют какие-то углы в неевклидовой геометрии, то удобнее будет модель Пуанкаре. А как поступать в том случае, когда нам приходится иметь дело с большим числом прямых и при этом важно представить себе и углы между этими прямыми?

Одним из возможных выходов из положения здесь является следующий: использовать и модель Клейна и модель Пуанкаре одновременно. Такое одновременное рассмотрение обеих моделей становится возможным благодаря наличию замечательной связи между ними. Эта связь заключается в следующем.

Рассмотрим внутренность окружности Σ , представляющую собой модель Клейна неевклидовой геометрии Лобачевского, и сопоставим каждой точке M такую точку M' , что (неевклидово) расстояние OM' (где O — центр Σ) в два раза меньше (неевклидова) расстояния OM («неевклидова гомоте-

¹⁾ Под углом между пересекающимися окружностями понимается угол между касательными к этим окружностям, проведенными в точке пересечения.

К ИСТОРИИ ПОСТУЛАТА О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ В СВЯЗИ С ПРАКТИКОЙ СОВРЕМЕННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ*)¹⁾

Я. С. Дубнов

(Москва)

1. Принято думать, что на исходе шестого десятилетия прошлого века приблизилось к завершению победоносное шествие идей Н. И. Лобачевского и научный мир принял его тезис о логической равноправности евклидовой и неевклидовой геометрий. Вместе с тем должны были прекратиться, по крайней мере в среде серьезно образованных математиков, попытки доказательства постулата о параллельности. И однако в 1869—1870 гг. видный французский математик, член Парижской академии Ж. Бертран²⁾ защищал такое доказательство, предложенное мало известным автором Картоном³⁾. В двух докладах, напечатанных в «Отчетах» (Comptes rendus) Академии за 1869 и 1870 гг., Бертран сначала излагал доказательство Картона, а затем полемизировал с критиками этого доказательства. Оба доклада были переведены на русский язык и напечатаны без комментариев в 4-м томе «Математического сборника» (1869—1870 гг.). Значительно

*) Статья была напечатана в журнале «Математика в школе», 1950, № 5, стр. 1—8. (Прим. ред.)

¹⁾ Изложение доклада, сделанного автором в школьной секции Московского математического общества (в заседаниях 21 апреля и 19 мая 1949 г.). Уже после того как доклад был сделан, а изложение подготовлено к печати, появилась статья Э. К. Хилькевича «Из истории распространения и развития идей Н. И. Лобачевского в 60—70-х годах XIX столетия» (сборник «Историко-математические исследования», вып. II, ГТТИ, 1949), которая содержит исторические и библиографические сведения более подробные, чем приведенные в исторической части этого доклада.

²⁾ Книжки Бертрана переводились на русский язык и в свое время оказали известное влияние на нашу школу. Таковы: 1) Дифференциальное исчисление, СПб, 1911; 2) Алгебра, СПб, 1899.

В связи с этим следует упомянуть о книгах, сыгравших заметную роль в те годы, когда в наших гимназиях преподавалась теоретическая арифметика: Билибин, Теоретическая арифметика, составлена по Бертрону и др., изд. 9-е, 1914. Его же, Алгебра для гимназий и реальных училищ, составлена по Бертрону и др., изд. 3-е, 1899.

³⁾ J. Carton, Nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles, Comptes rendus Ac. Sc., Paris 69, 1869. (Прим. ред.)

позднее (1887 г.) киевский профессор В. П. Ермаков¹), основатель «Журнала элементарной математики» (впоследствии получившего название «Вестник опытной физики и элементарной математики»), изложил для своих читателей рассуждения Картона²), причем, сохраняя идею доказательства, заметно его упростил. В. П. Ермаков не считает это доказательство убедительным, а только «наилучшим» в том смысле, что ошибку труднее обнаружить, чем в других случаях. Однако он сам не вскрывает порочности доказательства, предлагая сделать это читателям. Действительно, вскоре в журнале (№ 41 за 1888 г.) появилась заметка преподавателя В. Соллертинского («наставника гатчинской учительской семинарии»), который, по собственному признанию, пытался сначала усовершенствовать доказательство, но на этом пути пришел к убедительному его опровержению. Более того, в статье остроумными соображениями доказывается, что, принимая постулат Лобачевского в форме: «сумма углов треугольника меньше двух прямых», мы делаем построение Картона, упрощенное Ермаковым, неосуществимым. Ниже изложен вариант доказательства, предложенный Ермаковым.

Предварительно вспомним следующие результаты, полученные Лежандром в начале прошлого века и доказанные им строго *без апелляции к постулату о параллельности*.

1) Сумма углов треугольника не может превышать π (здесь и в дальнейшем π — числовая мера развернутого угла); если назовем *дефектом* треугольника разность между π и суммой его углов, то эту теорему можно выразить еще так: *дефект треугольника не может быть отрицательным*.

2) Если для одного хотя бы треугольника дефект равен нулю, то он равен нулю для *любого* треугольника, и тогда геометрия окажется евклидовой, т. е. будет выполняться постулат о параллельности. Отсюда следует (от противного), что если постулат о параллельности не выполняется, то у всех треугольников дефекты положительны (и, вообще говоря, различны, как показывает несложное рассуждение).

Если бы теперь удалось доказать, что не существует треугольника с положительным дефектом, то этим была бы обоснована евклидова геометрия; приведем «доказательство» от противного, следуя в основном Картону и Ермакову.

¹) Василий Петрович Ермаков родился в 1845 г., умер в 1929 г. В возрасте 25 лет привлек к себе внимание научного мира открытием очень сильного признака сходимости рядов, который и теперь иногда воспроизводится в курсах анализа. В дальнейшем — многолетний профессор Киевского университета, автор многих научных работ по вариационному исчислению и теории чисел, член-корреспондент Академии наук. Неоценимой заслугой В. П. Ермакова перед нашей школой и математической культурой надо считать создание первого у нас устойчивого журнала, освещавшего вопросы элементарной математики и ее преподавания. Отказавшись позже от редактирования журнала, В. П. Ермаков на протяжении многих лет оставался деятельным его сотрудником.

²) В. П. Ермаков, О сумме углов треугольника, Вестник опытной физики и элементарной математики 31, 1887. (Прим. ред.)

Пусть AA_1B_1 — треугольник с положительным дефектом δ (рис. 1). На прямой AA_1 отложим $n-1$ раз подряд отрезок, равный AA_1 так, что образуется последовательность, состоящая из n равных между собой отрезков:

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_n.$$

В интересах дальнейшего выберем число n таким, чтобы выполнялось неравенство

$$n\delta > 3\pi. \quad (1)$$

Каким бы малым ни было положительное (по допущению) δ , этого всегда можно достигнуть, если взять $n > \frac{3\pi}{\delta}$.

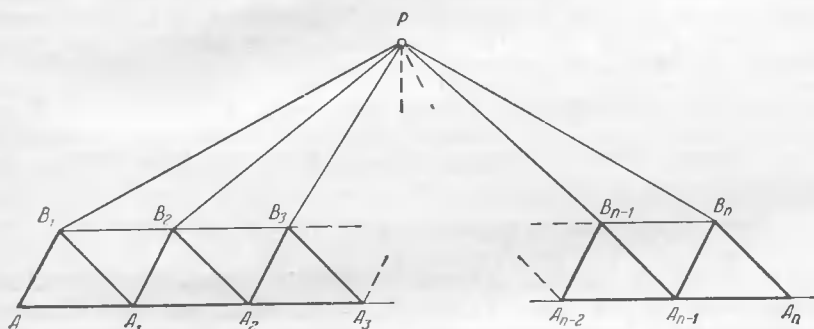


Рис. 1.

На каждом из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ построим треугольник, равный исходному $\triangle AA_1B_1$ и лежащий по ту же сторону от прямой AA_n ; получим последовательность равных между собой треугольников:

$$\triangle AA_1B_1 = \triangle A_1A_2B_2 = \dots = \triangle A_{n-2}A_{n-1}B_{n-1} = \triangle A_{n-1}A_nB_n, \quad (2)$$

вершины которых соединим отрезками $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n$ (замечим: мы не утверждаем, что эти отрезки расположатся на одной прямой; последующие рассуждения в этом утверждении не нуждаются).

В плоскости чертежа возьмем точку P под единственным условием, чтобы она лежала выше ломаной (может быть, прямой) $B_1B_2\dots B_n$; очевидно, это можно сделать с большой степенью произвола. Соединим точку P со всеми вершинами B_1, B_2, \dots, B_n и получим $n-1$ треугольников:

$$\triangle PB_1B_2, \triangle PB_2B_3, \dots, \triangle PB_{n-1}B_n, \quad (3)$$

которые вместе с ранее построенными заполняют внутренность пятиугольника $AB_1PB_nA_n$ (замечим: мы не утверждаем, что этот

пятиугольник — выпуклый, но он во всяком случае «простой многоугольник», т. е. ограничивающая его ломаная сама себя не пересекает).

Теперь двумя способами подсчитаем сумму углов всех треугольников, заполняющих внутренность пятиугольника (образно его можно было бы назвать «шатер Ермакова», — в доказательстве Картона этой фигуры нет).

1-й способ. Мы имеем n равных треугольников (2), у каждого из которых сумма углов есть $\pi - \delta$; это дает в общую сумму слагаемое $n(\pi - \delta)$. Сюда надо присоединить углы $n - 1$ треугольников $A_1B_1B_2, A_2B_2B_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}B_n$ (нетрудно было бы показать, что эти треугольники равны между собой, но в этом нет надобности) и углы такого же числа треугольников (3), образующих «верх шатра». Таким образом, надо присоединить углы $2(n - 1)$ треугольников, у каждого из которых, в силу нашего допущения, сумма углов меньше π , а потому у всех этих треугольников, вместе взятых, сумма углов меньше, чем $2\pi(n - 1)$; обозначим ее через

$$2\pi(n - 1) - \alpha, \text{ где } \alpha > 0. \quad (4)$$

Итак, первый способ подсчета суммы углов всех треугольников, заполняющих «шатер Ермакова», дает

$$n(\pi - \delta) + 2\pi(n - 1) - \alpha \quad (\delta > 0, \alpha > 0). \quad (5)$$

2-й способ. Будем сначала складывать углы, расположенные по три около точек (рис. 1) A_1, A_2, \dots, A_{n-1} по одну сторону от прямой AA_n . Таких точек имеем $n - 1$, а сумма трех углов около каждой из них равна π , что дает в общую сумму $\pi(n - 1)$. Далее сложим углы, расположенные по пяти вокруг точек B_2, B_3, \dots, B_{n-1} . Число точек теперь $n - 2$, а сумма углов вокруг каждой из них равна 2π , так что к общей сумме прибавляется $2\pi(n - 2)$. Рассмотренными до сих пор углами еще не исчерпываются все подлежащие сложению, например, не учтен $\angle AA_1B$; обозначим сумму всех неучтенных углов (во всяком случае положительную) через Σ , и тогда результат второго способа подсчета представится выражением

$$\pi(n - 1) + 2\pi(n - 2) + \Sigma. \quad (6)$$

А так как первый и второй способы должны давать одинаковые результаты (в обоих случаях — сумму углов всех треугольников, входящих в состав «шатра»), то [приравнявая (5) и (6)]:

$$n(\pi - \delta) + 2\pi(n - 1) - \alpha = \pi(n - 1) + 2\pi(n - 2) + \Sigma.$$

После элементарных упрощений находим:

$$\alpha + \Sigma + (n\delta - 3\pi) \equiv 0.$$

Первые два слагаемые положительны согласно своему смыслу [см. (4)]; разность, выделенная скобками, положительна в силу нашего выбора

числа n [см. (1)]. Получается, что сумма трех положительных слагаемых равна нулю; это противоречие показывает, что наше предположение о возможности положительного дефекта неправильно. Дефект треугольника может быть равен только нулю, а это равносильно утверждению, содержащемуся в постулате о параллельности. Этим доказательство завершено.

Здесь у меня появляется соблазн остановиться и, подобно тому, как это сделал в свое время В. П. Ермаков, предложить читателям собственными силами вскрыть ошибку в приведенном доказательстве. Однако тогда вторая из задач этой статьи — выводы, относящиеся к современному преподаванию геометрии, — не была бы достигнута. Поэтому следующий раздел посвящаю анализу доказательства (не теряя надежду на то, что найдутся читатели, которые прервут здесь чтение статьи, чтобы попытаться самостоятельно провести этот анализ) с тем, чтобы в третьем разделе изложить некоторые педагогические соображения.

2. Вдумываясь в изложенное выше доказательство [первая часть которого — построение цепи треугольников (2) — явным образом заимствована у Лежандра], нетрудно нащупать слабый его пункт. Это — *появление точки P* . Ведь не при всяком выборе этой точки доказательство может быть проведено. Если, например, считать для простоты, что цепь (2) состоит из трех треугольников ($n=3$), а точку P взять, как на рис. 2 (в остальном этот чертеж повторяет обозначения рис. 1), то фигура существенно изменится: пятиугольник $AB_1PB_3A_3$ уже не будет простым (стороны его AB_1 и PB_3 пересекаются), треугольники, которые в случае рис. 1 не имели общих внутренних точек, теперь частично налегают друг на друга — прежнего доказательства повторить нельзя. Значит, точка P должна быть выбрана с соблюдением каких-то условий, которые мы в своем изложении доказательства охарактеризовали мало значащими словами: «выше ломаной $B_1B_2...B_n$ »; теперь необходимо эти условия уточнить.

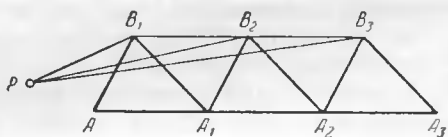


Рис. 2.

Для того чтобы треугольники PB_kB_{k+1} и $A_kB_kB_{k+1}$ с общей стороной B_kB_{k+1} не налегали друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы точки P и A_k лежали по разные стороны от прямой B_kB_{k+1} и чтобы это имело место при всех допустимых значениях k . Таким образом, точка должна лежать по определенную сторону от каждой из $n-1$ прямых $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n$. Если учесть, что цепь треугольников (2) может быть сколь угодно длинной, т. е. число n — сколь угодно большим, то возникает вопрос, *существует ли точка P , удовлетворяющая одновременно всем этим $n-1$ условиям?* Наша евклидова интуиция подсказывает положительный ответ на этот вопрос.

На основе этой интуиции мы представляем себе, а опираясь на постулат о параллельности можем строго доказать, что точки B_1, B_2, \dots, B_n (равноудаленные от прямой AA_n) лежат на одной прямой, и тогда вопрос о существовании точки P разрешается очень просто: достаточно взять эту точку где угодно в той из двух полуплоскостей, определяемых прямой B_1B_n , где не лежат точки A, A_1, \dots, A_n . Но ведь в рассуждениях Картона — Ермакова мы не имеем права ссылаться на постулат о параллельности (который является конечной целью этих рассуждений), а ссылка на интуицию вообще незаконна в строго дедуктивном доказательстве; значит, подчеркнутый выше вопрос о существовании точки P остается открытым. Таким образом, доказательство содержит логический пробел, и пока он не заполнен, мы имеем право объявить это доказательство несостоятельным, а дискуссию о нем законченной.

Однако, кроме логической стороны, дискуссия имеет другую, которую можно назвать психологической. Нас беспокоит вопрос: не может ли быть заполнен отмеченный выше пробел? Если бы это случилось, то наше торжество над сторонниками доказательства Картона оказалось бы временным. Другими словами, нам хотелось бы удостовериться в том, что, отказываясь от постулата Евклида в пользу постулата Лобачевского, мы уже не можем утверждать, что всегда [т. е. при всяком числе n треугольников (2)] существует точка P с требуемыми свойствами.

Косвенным доказательством этого служит то обстоятельство, что в геометрии Лобачевского теорема Картона («дефект треугольника не может быть положительным») есть *заведомый софизм*, а если бы точка P всегда существовала, то теорема была бы верна. Но нет ли прямого доказательства? Ниже даются два таких доказательства, причем от читателя требуются самые скромные сведения из геометрии Лобачевского¹⁾.

Для первого доказательства воспользуемся известной моделью, осуществляющей плоскость Лобачевского внутри евклидова круга. Дадим беглое описание этой модели (условимся в знак того, что старый термин употребляется в новом смысле, ставить кавычки), отсылая за подробностями к литературе.

¹⁾ Если предполагать эти сведения более глубокими, то наиболее коротким и изящным является, вероятно, опровержение доказательства Картона, данное в 1870 г. французским пропагандистом геометрии Лобачевского Юэлем (G. Houel — Гуэль — в цитированной статье Э. К. Хилькевича, откуда заимствовано приводимое ниже изложение идеи этого опровержения).

Как известно, в геометрии Лобачевского площадь треугольника не может превышать некоторой границы; следовательно, площадь простого пятиугольника — пять раз взятой этой границы. Между тем, складывая площади равных треугольников, взятых в достаточно большом числе, можно получить сколь угодно большую площадь. В силу этого цепь треугольников (2) может оказаться настолько длинной, чтобы никакой простой пятиугольник («шатер») не мог ее охватить.

«Плоскость» (Лобачевского) — внутренность некоторого круга K (рис. 3); «точка» — точка внутри круга (но не на его окружности!); «прямая» — открытая (т. е. лишенная концов) хорда, например AB . Эта «прямая» разбивает «плоскость» на две «равные» («конгруэнтные») «полуплоскости», которые на чертеже изображаются двумя отнюдь не равными (в евклидовом смысле) сегментами круга. Уже отсюда видно, что критерии равенства (отрезков, углов) на этой модели существенно отличаются от евклидовых. Более полное представление об этом дает рисунок 3, где

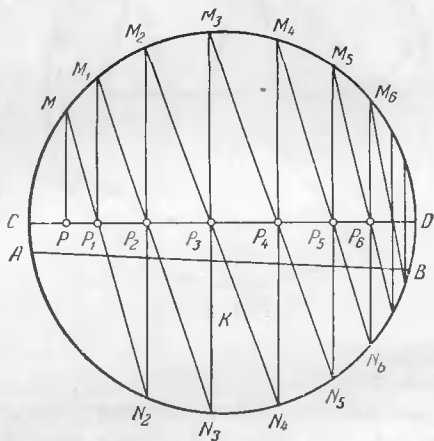


Рис. 3.

проведена «прямая» — диаметр CD , на ней отложен отрезок (он же «отрезок») PP_1 и затем выполнены следующие евклидовы построения: последовательно проводятся прямые: $PM \perp CD$, MP_1N_1 , $P_1M_1 \perp CD$, $M_1P_2N_2$, $N_2P_2M_2 \perp CD$, $M_2P_3N_3$, $N_3P_3M_3 \perp CD$, $M_3P_4N_4$ и так далее неограниченно, причем все точки, обозначенные буквами M и N , лежат на окружности, а все точки, обозначенные буквой P — на диаметре CD . «Вырожденные треугольники» PP_1M_1 , $P_1P_2M_2$, $P_2P_3M_3$, ..., $P_5P_6M_6$, ... все «равны» между собой (при этом PM и P_1M_1 «параллельны», равно как P_1M_1 и P_2M_2 и т. д.). Описанное выше евклидово построение дает возможность откладывать данный «отрезок» неограниченное число раз вдоль «прямой» — диаметра, а последняя оказывается в этом смысле такой же бесконечной, как и евклидова прямая (это происходит за счет того, что по мере удаления от центра «отрезки», оставаясь «равными» в смысле геометрии Лобачевского, убывают быстро и притом неограниченно в евклидовом смысле).

Теперь нетрудно понять, что цепь «равных» «треугольников» (2) на нашей модели может дать картину, изображенную на рис. 4, где для удобства сопоставления сохранены обозначения рис. 1 (более детальный анализ обнаружил бы, что точки B_1, B_2, \dots, B_n лежат на полуэллипсе, который касается круга K в концах диаметра AA_n). Если теперь на этом чертеже попытаемся построить «шатер Ермакова», то для выбора точки будем иметь весьма ограниченный простор. Например, эта точка должна лежать в «полуплоскости», представленной на модели заштрихованным сегментом с хордой B_1B_2 ; с другой стороны, точка P должна находиться внутри такого же сегмента (тоже заштрихованного на чертеже) с хордой $B_{n-1}B_n$. Легко представить себе, что при достаточно длинной цепи треугольников, т. е. при

достаточно большом числе n (а оно действительно может быть сколько угодно большим при достаточно малом дефекте δ), оба упомянутых сегмента не будут иметь общих точек, как показано на рис. 4. В этом случае *не существует* точки P , удовлетворяющей поставленным условиям, и доказательство Картона — Ермакова не может быть проведено.

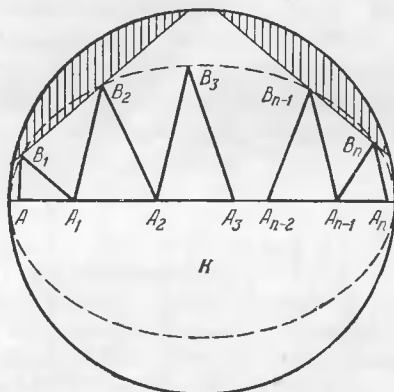


Рис. 4.

Во время Лобачевского для неевклидовой геометрии еще не знали моделей вроде той, которую мы применили. Тогда пользовались, чтобы придать наглядность рассуждениям неевклидовой геометрии, чертежами, близкими к обычным, при надобности жертвуя нашими зрительными привычками, например, искажая углы или искривляя на чертеже прямые линии (последнего, впрочем, Лобачевский избегал). Поэтому интересно представить себе, как обосновывал бы сам Лобачевский, если бы ему пришлось столкнуться с доказательством картоновского типа, невозможность провести это доказательство в его геометрии. Можно думать, что рассуждения были бы близки к следующим.

Рассмотрим сначала два левых треугольника AA_1B_1 и $A_1A_2B_2$ цепи (2) (рис. 5). Соединим вершины B_1 и B_2 прямолинейным отрезком (на чертеже слегка искривлен) и опустим перпендикуляры B_1C_1 и B_2C_2 (на чертеже прямые углы отмечаются малыми зачерченными прямоугольниками). Образуется четырехугольник $B_1C_1C_2B_2$ с прямыми углами при вершинах C_1C_2 и равными боковыми сторонами $C_1B_1 = C_2B_2$ (так называемый «четыреугольник Саккери»). Такой четырехугольник имеет ось симметрии MN , перпендикулярную одновременно к нижнему основанию C_1C_2 и верхнему B_1B_2 . Теперь через точку M проведем луч MQ , параллельный (в смысле Лобачевского) лучу B_1B_2 (сильно искривленному на чертеже в целях экономии места; направление параллельности отмечено стрелками). Для этого достаточно построить середины M и N отрезков C_1C_2 и B_1B_2 , а затем угол NMQ , равный углу параллельности отрезка MN [в обозначениях Лобачевского $\angle NMQ = \Pi(MN)$]. Далее, к прямой A_1A_2 восставим перпендикуляр RS , параллельный (снова в смысле Лобачевского) лучу MQ ; для этого достаточно отложить отрезок MR , такой, чтобы угол параллельности этого отрезка, т. е. $\Pi(MR)$, был равен построенному уже углу QMA_2 . Вершина P «штра» должна находиться выше прямой B_1B_2 (в полуплоскости, заштрихованной на рисунке 5 слева) и, значит, во всяком случае — левее перпендикуляра RS . Теперь легко представить себе, что правый конец треугольников (2) (не изображенный

на чертеже) настолько удален от левого, что, повторив для двух последних треугольников то же построение, что и для двух первых, мы вынуждены будем искать точку P в полуплоскости, заштрихованной на чертеже справа, т. е. во всяком случае правее перпендикуляра $R'S'$, который сам лежит справа от RS . Ясно, что при таких обстоятельствах мы точки P не найдем, — рассуждение Картона — Ермакова отпадает.

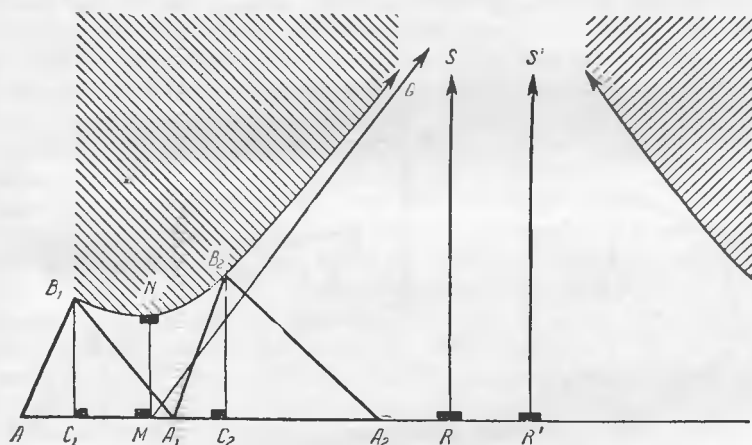


Рис. 5.

3. Итак, мы теперь не только знаем, что доказательство Картона с вариантом Ермакова содержит логический пробел, но еще и то, что этот пробел не может быть заполнен (до тех пор, пока не принят постулат о параллельности). Должны ли мы строго судить Бертрана, взявшего это доказательство под свою защиту? Прислушаемся к аргументации этого ученого. Он исходит из убеждения, что геометрия (в противоположность учению о числе) не есть строго дедуктивная наука, что она создает и оправдывает свои положения на двоякой основе: логике и очевидности (зрительной). Вспомним, что в годы выступления Бертрана еще не оформилось современное аксиоматическое обоснование геометрии, полностью изгоняющее интуицию как элемент доказательства (настолько, что принципиально вся геометрия может быть построена без единого чертежа). Вершиной не только школьного, но и научного построения геометрии в то время всё еще были «Начала» Евклида, взятые вместе с позднейшими комментариями¹⁾, и Бертран был бы прав, если бы сказал своим оппонентам: «Доказательство

¹⁾ Конечно, Берtrandу (и не ему одному из ученых второй половины XIX в.) должно быть вменено в вину, что он не понял значения той глубокой брешы, которую открытие Лобачевского пробило в здании Евклида.

Картона не хуже тех доказательств Евклида, которые вы считаете классическими и в качестве образцовых преподносите учащимся».

В самом деле, оставим Бертрана, а вместе с ним историю и обратимся к современному преподаванию.

Доказывается теорема о сумме внутренних углов многоугольника (рис. 6, левая фигура). Разбиваем многоугольник $ABCDEF$ на треугольники таким образом, что внутри многоугольника берем точку P и соединяем ее со всеми вершинами. При этом существенным является то обстоятельство, что треугольники не налегают друг на друга; именно потому мы можем утверждать, что сумма тех углов этих треугольников, которые лежат вокруг общей вершины P , равна $4d$.

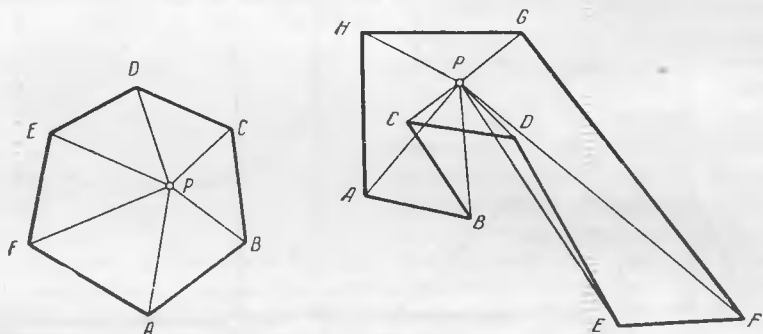


Рис. 6.

Однако откуда берется уверенность в том, что существует внутри многоугольника такая точка P , исходя из которой мы получим неперекрывающийся треугольник? — Вот, например, для многоугольника $ABCDEFGH$ (рис. 6, правая фигура) такой точки найти нельзя (между прочим, теорема о сумме внутренних углов для него верна, потому что это — простой многоугольник). На это нам говорят: при правильной формулировке теоремы указывается, что речь идет о выпуклом многоугольнике, а для него такая точка заведомо существует. Возражаю: это есть типичное «педагогическое лицемерие» (заимствую выражение у Лебега ¹⁾): о выпуклости многоугольника в условии теоремы действительно говорится, но в доказательстве эта выпуклость не используется, обычно даже не упоминается; во всяком случае она работает не как логический элемент доказательства, а только как зрительный (нарисован выпуклый многоугольник ²⁾). Так чем же это доказательство

¹⁾ «Об измерении величин», Учпедгиз, 1938, стр. 33.

²⁾ Пусть читатель попробует доказать теорему: выпуклый n -угольник разбивается из внутренней точки на n неперекрывающихся треугольников. Доказательство представляется мне не столь уже трудным, но и не совсем простым; придется использовать определение выпуклости, уточнить понятие «неперекрывающихся треугольников» (как не имеющих общих внутренних точек) и т. д.

лучше картоновского? В логическом отношении они стоят на одинаковом уровне, так как в обоих случаях остается недоказанным существование точки P ; в отношении же зрительной наглядности — тоже на одинаковом уровне: существование требуемой точки представляется здесь и там очевидным из чертежа.

Менее всего я хотел бы, чтобы из этого сопоставления был сделан следующий вывод: «Так как в преподавании геометрии мы обречены на то, чтобы давать логически неполноценные доказательства, то можно разрешить себе доказывать в школе постулат о параллельности по Картону; мы согрешим при этом, но не больше, чем при выводе формулы для суммы внутренних углов многоугольника». — Нет, между этими двумя случаями имеется принципиальная разница, которая и приводит к противоположным педагогическим выводам. Правда, теорема о многоугольнике доказывается с логическим пробелом, но теорема верна, потому что мы знаем, как этот пробел восполнить. Теорема же Картона (имеется в виду утверждение: «независимо от того, выполняется или нет постулат о параллельности, дефект треугольника не может быть положительным») доказывается с таким же логическим пробелом, но эта теорема не верна, т. е. пробел не может быть восполнен. А заниматься в школе софистическими рассуждениями, выдавая их за доказательства, недопустимо. Короче говоря, *обманывать нельзя*.

На этом расстанемся с теоремой Картона, для того чтобы сделать еще некоторые педагогические выводы. Хотя современная математика хорошо знает, как должна быть построена научная система геометрии и насколько эта система далека от «Начал» Евклида, равно как и от «Геометрии» А. Киселева, однако подавляющее большинство педагогов сходится на том, что упоминавшаяся выше «геометрия без чертежей» и даже какие-либо приближения к ней не могут найти себе места в элементарном преподавании.

Школьная геометрия осуждена оставаться логически неполноценной; в ее построении интуиция не может и не должна быть окончательно вытеснена логикой. Трудная задача преподавания состоит в том, чтобы разумно дозировать (на разных ступенях обучения по-разному) эти два образовательных элемента и по возможности их разграничивать. Во всяком случае пора преодолеть прочную еще иллюзию, будто евклидово здание является «непревзойденным образцом логического совершенства», а «Геометрия» А. Киселева или любой другой учебник — подлинной «школой дедуктивного мышления». По поводу последнего мнения хочу заметить, что хорошо объясненный (без особых мудрствований) вывод формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

представляет собой гораздо более совершенный образец дедукции, чем любая теорема из школьного курса геометрии. В связи с этим следует пересмотреть традиционный взгляд, согласно которому преиму-

ственно геометрия, а не алгебра¹⁾ призвана воспитывать дедуктивное мышление. Этот пересмотр надо вести с двух концов. Во-первых, преподавание алгебры должно усилить элемент рассуждений и обоснования правил в противовес часто наблюдаемой склонности к рецептуре. В учебниках алгебры должен чаще (а к слову сказать, в учебниках геометрии — реже) появляться заголовок «теорема», совершенно так же, как это происходит в научной литературе, где названный заголовок

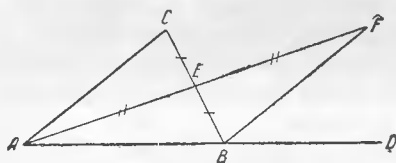


Рис. 7.

вовсе не специфичен для геометрических сочинений. Во-вторых, при изложении доказательств геометрических теорем должны быть более четко ограничены логические элементы от интуитивных, отмечаемых словами «примем за очевидное» «примем без доказательства» и т. п.

Это разграничение не следует проводить в одинаковой мере на различных стадиях обучения. На старшей ступени подчеркивание ссылок на интуицию может быть исчерпывающим или почти таковым; почва для этого подготовлена как накоплением большого числа геометрических фактов, на которые можно сослаться, так и выросшим у школьников пониманием природы математического доказательства. В начальной же стадии обучения нагромождение подобных оговорок будет воспринято 12—14-летними детьми как отталкивающий педантизм. Вот, например, как выглядело бы доказательство теоремы: «Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного»²⁾, если бы сопроводить его некоторыми оговорками, отмечающими ссылки на интуицию (рис. 7). «...Примем без доказательства, что существует точка E , делящая отрезок BC пополам³⁾. Соединим точки A и E прямолинейным отрезком AE (аксиома) и продолжим его за точку E .

¹⁾ Говоря о школьной алгебре, я всегда имею в виду тот пестрый конгломерат из алгебры и введения в анализ, который у нас составляет единый предмет преподавания; сюда же отношу теоретические вопросы арифметики (например, признаки делимости).

²⁾ Оставляю в стороне вопрос о том, насколько вообще эта теорема уместна в курсе геометрии. Вместе со многими я думаю, что ее давно пора передать в музей древностей, заменив более сильной: «Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных», основанной на теории параллельности.

³⁾ Тем из читателей, которым эта фраза покажется шаржем, не имеющим прообраза в нашей практике преподавания, напомню, что в длинном ряде прежних изданий учебника А. Киселева одной из первых была теорема: «Из точки, взятой на прямой, можно восстановить к ней перпендикуляр...». По существу здесь доказывалось, что «для каждого развернутого угла существует луч, делящий этот угол пополам», т. е. утверждение, вполне аналогичное тому, которое в тексте формулировано для отрезка. Да и само (шаткое) рассуждение А. Киселева легко могло бы быть приспособлено для доказательства существования середины отрезка. Напомню еще, что доказательство существования перпендикуляра, исчезнувшее из учебника А. Киселева, возродилось в наши дни в «Методике геометрии» Н. М. Бескина (Учпедгиз, 1947, стр. 89—90).

Примем без доказательства, что на луче, составляющем продолжение отрезка AE , можно отложить отрезок EF , равный отрезку AE . Примем без доказательства, что при этом точка F поместится внутри угла CBD . Соединим B с F (аксиома) и примем без доказательства, что луч, соединяющий вершину угла с внутренней его точкой, лежит внутри этого угла и т. д.». Достаточно прочесть этот отрывок, чтобы понять его педагогическую абсурдность!

Еще один вывод, которому я придаю большое значение, хочется сделать из этих исторических и педагогических рассмотрений. Раз интуиция является одним из источников геометрического познания и законным базисом дедуктивного построения при условии, что явно формулируется суждение, принимаемое без доказательства, то следует шире использовать в преподавании проистекающие отсюда возможности. Для начального курса геометрии это означает, что *может быть принято без доказательства (сверх традиционных аксиом) предложение, которое а) верно, б) подтверждается интуицией* (тех, кому это доказательство сообщается). Пункт а) надо понимать так, что нам известно исчерпывающее доказательство, но из педагогических соображений мы воздерживаемся от того, чтобы излагать его ученику. Пункт б) предполагает, что либо сообщаемый геометрический факт представляется всякому ученику непосредственно очевидным, либо может быть сделан таковым после некоторых иллюстрирующих пояснений (не носящих характера доказательства, быть может, апеллирующих к другим интуитивным представлениям). Например, ученику представляется очевидным равенство углов при основании равнобедренного треугольника, равенство диагоналей прямоугольника и др. [здесь действует, пусть неосознанное, интуитивное, представление об осевой симметричности этих фигур¹⁾]. Менее очевидным представляется начинающему такой, например, факт: «если две стороны треугольника, сохраняя свои длины, вращаются вокруг общей вершины так, что угол между ними возрастает от нуля до развернутого, то третья сторона возрастает от разности первых двух сторон до суммы». (Здесь, в частности, содержится теорема: «Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы... не равны, то...», доказательство которой трудно для начинающего.) Однако достаточно учителю взять в руки два карандаша (неодинаковой длины) и, зажимая между двумя пальцами их соединенные концы, раздвигать два других конца, чтобы справедливость утверждаемого предстала перед учениками со всей очевидностью.

¹⁾ Этим я никак не хочу сказать, что следует отказаться от доказательства этих теорем. Доказательства даются не только с познавательной целью (овладение новыми фактами), но и с образовательно-воспитательной (упражнение в рассуждениях, выяснение связей между фактами). Подобно этому физкультурные упражнения делаются не для того, например, чтобы переместить тяжелое ядро из одного пункта поля в другой.

Подчеркиваю, что эта манипуляция не есть экспериментальная проверка (я решительно отвергаю эксперимент как единственную базу для обучения геометрии, даже на самой ранней ступени; теперь мы знаем, что уже вавилонская геометрия не была чисто экспериментальной), никаких измерений расстояния между движущимися концами карандашей она не предполагает. Назначение этой примитивной модели — заставить работать интуицию ученика, т. е. неосознанные, но прочные (в результате многократного наблюдения) пространственные представления. В описанном случае мы имеем дело с предложением, удовлетворяющим обоим требованиям а) и б), поэтому я считаю возможным (а на первой стадии обучения — даже рекомендую) принять его без доказательства. Но вот по отношению к теореме Пифагора я ни на какой ступени не решился бы отказаться от доказательства. Хотя эта теорема, конечно, удовлетворяет требованию а) (и сколько угодно раз может быть подтверждена измерительным экспериментом), однако мне неизвестны способы сделать ее содержание очевидным: она не удовлетворяет требованию б). Чтобы привести пример обратного положения (удовлетворено требование б), но не а)), выделим из доказательства Картона — Ермакова следующее утверждение: «какова бы ни была цепь равных треугольников (2) (рис. 1), всегда можно выбрать точку P так, чтобы...». Здесь интуиция вводит нас в заблуждение, внушая веру в безусловную справедливость этого утверждения, будто бы не зависящую от наших допущений о параллельности. Требование б) выполнено, но утверждение никем не доказано (нам известно больше: его нельзя доказать без постулата о параллельности, а если постулат принят, то оно бесполезно), и мы, даже не зная того, что только что сказано в скобках, не можем принять это утверждение без доказательства.

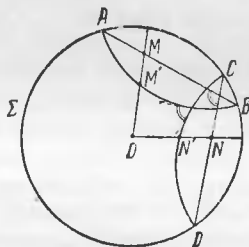
На старшей ступени обучения запас сведений уже настолько велик, а учащиеся настолько созрели для понимания более сложных рассуждений, что не возникает настоятельной необходимости в том, чтобы то или иное предложение частного характера (например, какую-нибудь формулу площади или объема) принять без доказательства. Однако, поскольку на этой ступени знакомство с методами науки становится не менее важным, чем знакомство с фактами, особое значение приобретают те общие предложения, которые лежат в основе какого-либо метода. А эти предложения нередко могут быть обоснованы только средствами, выходящими за рамки средней школы. В вопросе о том, допустимо ли применять такое предложение без доказательства, мне кажутся решающими те же критерии а) и б). Например, известно, какую роль играют в современном преподавании геометрии понятие о пределе (впрочем, не беру традиционное использование этого понятия под свою защиту) и постоянно применяющееся предложение: «если числа некоторой последовательности монотонно возрастают (убывают), оставаясь меньше (больше) некоторого числа, то последовательность имеет предел». Отказ от доказательства этого предложения представляется мне

вполне обоснованным, так как здесь удовлетворяются оба требования а) и б) (полная наглядность предложения достигается, например, если иллюстрировать его на числовой прямой).

Из тех же соображений я не поколебался бы ввести в преподавание «принцип Кавальери», именно — ради идейной ценности основанного на нем метода, а вовсе не ради экономии времени и упрощения доказательств. Этот принцип верен [требование а)] для всех фигур и тел, рассматриваемых в элементарной геометрии (на самом деле — для гораздо более широкого класса), и он может быть сделан вполне наглядным [требование б)] с помощью самых простых иллюстрирующих моделей из палочек (для плоскости) или из пластинок (для пространства). А вот как ни соблазнительно ввести в среднюю школу «теорему Симпсона», которая действительно объединяет все изучаемые там формулы для объемов, я не решился бы сделать это без доказательства (безукоризненное проведение которого сложно): теорема удовлетворяет требованию а), но не б).

Хотелось бы, чтобы те педагоги, которые, например, при упоминании о принципе Кавальери морщатся («Еще одна теорема без доказательства!»), — чтобы в свете приведенных здесь исторических данных и примеров из современности эти педагоги подумали, не защищают ли они призрак «евклидовой строгости» против требования честных и добрососедских границ между логикой и интуицией.

тия»). Если считать образом «неевклидовой точки» M точку M' , то мы приходим к модели Пуанкаре. В частности, точки хорды AB окружности Σ переходят при этом в точки дуги $AM'B$ окружности, перпендикулярной к Σ (см. рисунок).



Из сказанного вытекает, в частности, простое построение, позволяющее найти «неевклидов угол» между двумя «неевклидовыми прямыми», изображаемыми на модели Клейна (пересекающимися) хордами AB и CD . А именно, построим дуги $AM'B$ и $CN'D$ окружностей, перпендикулярных к Σ ; (евклидов) угол между этими окружностями и будет равен искомому «неевклидову углу» между AB и CD .

Эта связь между моделями Клейна и Пуанкаре была впервые отмечена Я. С. Дубновым в 1942 г. Тогда же он рассказал о ней своим товарищам по семинару по векторному и тензорному анализу при МГУ; разные доказательства этой теоремы Я. С. Дубнова были впоследствии даны В. Ф. Каганом, Б. А. Розенфельдом и И. М. Ягломом¹⁾. Сам же Я. С. Дубнов со свойственной ему требовательностью к себе не торопился с опубликованием полученного им интересного результата. Его оригинальное доказательство впервые публикуется в этом выпуске «Математического просвещения» в качестве решения поставленной Я. С. Дубновым задачи (см. стр. 266). Это доказательство заметнее всех тех, которые имелись до этого в литературе.

¹⁾ См. В. Ф. Каган, Развитие интерпретаций неевклидовой геометрии, «Труды семинара по векторному и тензорному анализу», вып. 7, 1949, стр. 192; Б. А. Розенфельд, Неевклидова геометрия, М., 1955, стр. 430—431; И. М. Яглом, Геометрические преобразования, ч. II, М., 1956, стр. 351—354.

ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ АКСИОМАТИКА ¹⁾

П. К. Рашевский

(Москва)

ГЕОМЕТРИЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Когда мы изучаем геометрию впервые — так, как она преподается в школе, — в нашем сознании возникает своеобразный мир идей, которые странным образом и реальны и прозрачны одновременно. В самом деле, мы рассуждаем о прямых линиях, о плоскостях, о геометрических телах (например, о шаре) и т. д., приписывая им вполне определенные свойства. Но где и в каком смысле существуют эти вещи в таком виде, в каком они служат предметом нашего изучения? Ведь мы знаем, что как бы мы ни шлифовали, скажем, поверхность металлической пластинки, мы никогда не сможем придать ей форму «идеальной плоскости» ввиду неизбежных погрешностей в инструменте и в самой операции. Более того, не только нельзя достичь идеально плоской формы, но вследствие атомного строения материи нельзя даже к ней неограниченно приближаться. Действительно, когда мы будем увеличивать требуемую точность, то металлическая пластинка распадается на отдельные атомы, и тогда вообще не имеет смысла говорить о ее поверхности.

А что такое прямая линия? Может быть, можно считать, что световые лучи распространяются по идеально прямолинейным путям? Но квантовая механика учит нас, что свет распространяется отдельными порциями — квантами, причем говорить о пути, по которому такой квант движется, вообще не имеет смысла.

Но тогда что же мы изучаем в геометрии? Как будто только призраки, создания нашего воображения, чуждые материальному миру. Но мы твердо знаем и из повседневного опыта, и из технической практики, что законы и правила, выведенные для этих призрачных объектов, с непреодолимой силой подчиняют себе материальную природу. И инженер, рассчитывающий новую конструкцию, усомнится в случае неудачи в каких угодно своих допущениях, но ни в коем случае не в формуле для объема призмы, например.

¹⁾ Настоящая статья представляет собой переработку вступительной статьи автора к «Основаниям геометрии» Д. Гильберта (Гостехиздат, М.—Л., 1948).

Так что же представляют собой эти геометрические образы, как будто невесомые, нематериальные и в то же время с такой непреодолимой силой облекающие собой материальный мир и, как можно подумать (и как идеалистическая философия часто и учила), формирующие его по своему образу и подобию?

Материалистическое понимание мира поможет нам ответить на этот вопрос. Начнем с нарочито грубого примера. Пусть перед нами забор, огораживающий земельный участок. Если мы будем вычислять площадь этого участка, намечать его распланировку и т. д., то в наших геометрических расчетах вместо забора будет фигурировать замкнутая линия, а вместо земельного участка — выделяемый ею кусок плоскости. В чем состоит суть этой подмены материального предмета геометрическим понятием?

Дело в том, что земельный участок практически не изменится от того, сделаем ли мы забор около него из дерева или камня, той или иной ширины, той или иной высоты, сдвинем ли его на сантиметр в сторону и т. д. От всего этого можно отвлечься, поскольку нас интересует только самый земельный участок, а то, что делается по самым его краям, практически роли не играет. Таким образом, мы отвлекаемся от подавляющего большинства свойств забора как материального тела, не важных для нас в данном случае. Те же свойства забора, которые для нас важны, — свойства, связанные с его протяженностью в длину, — мы сохраняем в поле зрения. И эти свойства как раз и будут свойствами линии в геометрическом смысле слова. То же самое относится и к бесчисленному ряду самых разнородных примеров: когда мы рассматриваем веревку, траекторию летящего снаряда и т. д., то с известной степенью точности нам приходится интересоваться лишь теми их свойствами, которые мы называем свойствами геометрической линии.

Итак, когда мы изучаем геометрическую линию, то мы изучаем одновременно и забор, огораживающий участок, и длинную — сравнительно с толщиной — веревку, и траекторию летящего снаряда. Но все эти явления мы берем не во всем разнообразии их свойств и не с максимальной точностью, а лишь с точки зрения их одномерной протяженности, почему-либо для нас в данном случае важной, и с практически нужной степенью точности. И тогда выступают те общие свойства этих предметов, которые мы и называем свойствами геометрической линии. Так, если мы говорим, что линия не имеет ширины, то это есть только краткое выражение того, что ширина забора практически не отражается на огороженном участке, что поперечными размерами веревки можно пренебречь сравнительно с ее длиной и т. д.

Аналогичный смысл имеют и все другие геометрические понятия и положения. Все они отражают свойства материальных предметов, законы материального мира. Их «идеальный» характер означает просто отвлечение (абстракцию) от несущественных в данной связи свойств

материальных вещей, в частности рассмотрение их лишь с известной степенью точности. Это отвлечение и позволяет выступить наружу в чистом виде тем общим и глубоким свойствам материальных вещей, которые мы называем свойствами протяженности и изучаем в геометрии. Законы геометрии обязательны для природы потому и постольку, поскольку они из нее извлечены.

Таким образом, истины геометрии, отражая материальную действительность, воспроизводят ее приближенно, в упрощенном, схематизированном виде. Именно за счет отвлечения от бесчисленного множества усложняющих обстоятельств и возникает столь импонирующая стройность и законченность геометрической теории. Но по той же причине геометрия (речь идет пока все время об евклидовой геометрии) не может претендовать на неограниченную приложимость к исследованию материального мира: когда точность этого исследования перейдет некоторые пределы, то геометрия, по самому своему существу отражающая действительность приближенно, откажется служить.

Чтобы сделать ее снова пригодной, нам придется уточнять ее в соответствии с новыми экспериментальными данными, нам придется искать иных, более гибких форм абстракции, способных более точно отобразить свойства протяженности, включить в рассмотрение то, что ранее, было отброшено. Но об этом мы еще будем говорить.

ГЕОМЕТРИЯ И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

До сих пор мы совершенно не затронули вопроса о логической структуре геометрии, а между тем она, пожалуй, наиболее поражает начинающего и требует от него наибольшего напряжения мысли. И это, конечно, не случайно: геометрия перестает быть только лишь собранием экспериментальных фактов и становится разделом математики именно здесь, когда между этими фактами устанавливаются глубокие связи. Постараемся в это вникнуть. Для большей конкретности ограничимся пока трехмерной евклидовой геометрией.

Прежде всего ясно, что геометрия не представляет собой просто совокупности предложений, имеющих самостоятельное значение каждое в отдельности. Предложения геометрии связаны густой сетью логических зависимостей. Более точно это значит, что одни предложения можно выводить из других чисто логическим путем, не пользуясь наглядно очевидными, почерпнутыми из опыта свойствами геометрических образов, а просто применяя правила формальной логики. Так, из предложений «всякий прямоугольник обладает равными диагоналями» и «всякий квадрат есть прямоугольник» следует, что «всякий квадрат обладает равными диагоналями». Для того чтобы сделать этот вывод, совершенно не обязательно представлять себе квадрат с его диагоналями; можно вообще не знать, что такое «квадрат» и «прямоугольник» и что значит «обладать равными диагоналями». Независимо от того, какой смысл будет вложен в эти термины, умозаключение воспроизводит один

из рассматриваемых в формальной логике типов силлогизма и потому всё равно остается правильным.

Естественно возникает вопрос: каким образом можно охватить, сделать осязательной всю систему формально логических зависимостей такого рода, пронизывающих геометрию, а не только отмечать их на отдельных примерах.

Ответ на этот вопрос дает *аксиоматическое построение геометрии*. Его целью является получить в геометрической теории, так сказать, максимум возможного за счет формально логических умозаключений. Конечно, так как формальная логика учит лишь тому, как выводить новые положения из уже данных положений, то «из ничего» формальная логика ничего вывести и не может. Поэтому, по крайней мере, некоторые из положений геометрии необходимо так или иначе принять в качестве верных, а затем уже попытаться все остальные положения выводить из них путем чисто логических умозаключений.

Если этой цели удастся достичь, то те положения геометрии, из которых все остальные можно вывести чисто логическим путем (без ссылок на геометрическую наглядность), называются *аксиомами*, а логически вытекающие из них предложения — *теоремами*.

При этом, естественно, нужно стремиться к тому, чтобы количество аксиом было возможно меньшим и чтобы тем самым на долю формально логических умозаключений при построении геометрии выпадала наибольшая возможная работа. Действительно, такое положение вещей наилучшим образом выявляет весь объем логических связей и освещает логическую структуру геометрии.

Резюмируем всё сказанное. *Геометрия возникает путем изучения свойств протяженности материальных тел. В этом смысле ее положения могут и должны быть проверяемы опытным путем, и, как все положения физики, они воспроизводят материальный мир лишь в абстракции и истинны поэтому лишь приближенно.*

Геометрия становится математической теорией, когда ее фактическое содержание удастся организовать на базе определенной системы аксиом. В данной аксиоматической системе об истинности предложений говорят лишь в том смысле, что данное предложение действительно выводится из принятых аксиом.

Таким образом, аксиоматическая система придает необозримому содержанию геометрии четкие и ясные очертания, позволяя в принципе описать его путем перечисления сравнительно немногочисленных аксиом. Но тем самым данная система аксиом заставляет геометрию окостенеть, принять раз навсегда фиксированное содержание. Однако природа неисчерпаемо сложна, и было бы наивно надеяться, что найдется система аксиом, отражающая геометрические свойства материальных тел идеально точным и единственно возможным образом. В связи с этим идеализированное отражение соотношений протяженности в математической теории можно осуществлять во многих вариантах, строить различные геометрические системы или, как говорят в математике, *раз-*

личные геометрии (а не только лишь одну евклидову геометрию, как думали до XIX в.). Одни из таких геометрий строятся путем по возможности непосредственной абстракции от экспериментального материала; эти теории имеют наибольшее значение для физики. Сюда относятся, прежде всего, конечно, евклидова геометрия, затем геометрия специальной и общей теории относительности — это как бы современные «уточнения» евклидовой геометрии на базе экспериментального материала.

Другие, напротив, возникают путем сложных, многоступенчатых, косвенных абстракций и служат предметом изучения математиков. Мы не можем входить в подробности, но стоит указать, что в настоящее время наибольшее значение имеют такие геометрии, аксиоматика которых уже не может быть описана на элементарно-геометрическом языке и строится на аналитической основе. Сюда относится прежде всего риманова геометрия, лежащая в основе общей теории относительности и заключающая в себя в качестве весьма частных случаев евклидову геометрию и геометрию Лобачевского.

После этих беглых замечаний мы вернемся к нашей основной теме — аксиоматическому построению прежде всего обычной евклидовой геометрии. Современное решение этой задачи возникло как итог длительного исторического развития, важнейшие моменты которого мы сейчас осветим — конечно, в очень кратких чертах.

«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА

«Начала» Евклида (около 300 г. до н. э.) содержат систематическое изложение основ геометрии в том виде, в каком она сложилась к этому времени в итоге примерно трех веков развития математики на греческой почве. С того и почти до нашего времени «Начала» считались образцом научно строгого стиля изложения; никто не находил поводов предпринять их коренную переработку, а наши школьные учебники и до сих пор в существенных чертах воспроизводят «Начала» Евклида.

Причина этого коренится в том исключительном мастерстве и совершенстве — конечно, с точки зрения науки того времени, — с каким было проведено Евклидом логическое развертывание геометрии путем, как тогда казалось, строгого вывода последующих предложений из предшествующих. Конечно, было бы сильным преувеличением сказать, что Евклид стоял на выше охарактеризованной точке зрения аксиоматического построения геометрии. Но тенденция такого рода у него, несомненно, была. Действительно, в начале изложения помещены четырнадцать основных предложений (пять из которых названы постулатами, а девять — аксиомами), которые предпосылаются всему дальнейшему и кладутся в его основу. Однако этих предложений далеко не достаточно для развития геометрии чисто логическим путем, и в дальнейших доказательствах наряду с подлинно логическими умозаключениями

Евклид постоянно прибегает к наглядному представлению. Многие из определений — и как раз самые основные, даваемые Евклидом, — совсем не являются определениями в логическом смысле, а являются лишь наглядными описаниями геометрических образов: например, «линия есть длина без ширины» и т. п. Из такого определения строго логически никаких следствий вывести нельзя, и оно служит лишь указанием для работы наглядного представления в последующих водах.

Таким образом, в «Началах» нельзя усмотреть еще ни принципиальной аксиоматической установки в современном смысле слова, ни во всяком случае ее фактического осуществления. Но тенденция в этом направлении была и продолжала развиваться и в дальнейшем. Это можно видеть из работ многочисленных комментаторов Евклида, которые, не предлагая существенных переработок изложения, часто стремились его усовершенствовать, подводя под него более прочный фундамент. Эти попытки шли по линии увеличения числа аксиом, недостаточность которых для логического построения геометрии ощущалась. И до сих пор мы не знаем, какие именно аксиомы и постулаты бесспорно принадлежат Евклиду, а какие добавлены впоследствии. Однако эти попытки по сравнению с «Началами» не знаменовали собой новых, принципиально более высоких точек зрения и делались ощутю. Даже когда в них правильно угадывались те пробелы, которые следовало заполнить, они облекались в ту же логически несостоятельную форму.

Подлинное развитие вопроса об основаниях геометрии пошло не по прямому пути логического уточнения аксиоматики и доказательств Евклида, а осуществилось причудливым образом через длинный ряд попыток исправить Евклида там, где он был совершенно прав. Мы имеем в виду историю V постулата Евклида.

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛИДА И ОТКРЫТИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Последний V постулат Евклида гласит: *«Всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$, эти прямые пересекаются и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше $2d$ »*. Постулат этот играет особую роль в системе Евклида: он находит себе применение сравнительно поздно, и 28 первых предложений Евклида доказываются без его участия. Это обстоятельство, естественно, наталкивало на мысль, что, быть может, и вообще этот постулат излишен и сам может быть доказан в качестве теоремы. И действительно, многие комментаторы Евклида на протяжении более двух тысячелетий пытались такое доказательство дать, часто считая свою цель достигнутой (а некоторые малообразованные дилетанты продолжают эти попытки и сейчас).

Все эти доказательства с нашей современной точки зрения ложны и сводятся к тому, что вместо V постулата принимается без доказательства какое-нибудь предложение, ему эквивалентное. Таковы, например, предложения: через каждую точку внутри угла проходит по меньшей мере одна прямая, пересекающая его обе стороны; непересекающиеся прямые в плоскости не могут неограниченно удаляться друг от друга; не существует абсолютной единицы длины, т. е. отрезка, который отличается от отрезков другой длины особыми геометрическими свойствами (наподобие прямого угла среди всевозможных углов); существуют по меньшей мере два подобных треугольника и т. д.

Расценивая какое-нибудь из этих предложений как очевидно верное и обнаружив, что отрицание V постулата ему противоречит, автор доказательства считал свою цель достигнутой. Было бы, однако, неправильным считать, что здесь мы встречаемся обязательно с элементарно грубой логической ошибкой. В самом деле, до появления современного аксиоматического изложения геометрии, — что было достигнуто лишь к концу XIX в., — вообще не было вполне отчетливого критерия, чтобы отличать строгие доказательства в геометрии от нестрогих. Во всех вообще доказательствах непрестанно допускались ссылки на наглядность, и те пределы, в каких эти ссылки можно считать законными, очерчены не были. Поэтому в известной мере каждый из авторов, доказывающих V постулат, мог претендовать, что его допущения законны, и V постулат им доказан. Лишь теперь выступает несостоятельность всех этих доказательств; раньше же она скорее угадывалась наиболее сильными умами, чем неопровержимым образом могла быть ими установлена.

Так или иначе, по мере накопления разнообразных попыток доказательства всё более расширялся круг предложений, эквивалентных V постулату, часть из которых перечислена выше. Становилось ясно, что отрицание V постулата влечет за собой отрицание всех этих предложений, т. е. влечет за собой ряд невероятных, парадоксальных следствий, в которых, однако, никак не удавалось усмотреть прямого логического противоречия. В поисках этого противоречия уже в XVIII в. некоторыми учеными были довольно далеко развиты следствия из предположения, что V постулат неверен (Саккери, 1733; Ламберт, 1788). По существу это были уже элементы неевклидовой геометрии, что, однако, не доходило до сознания авторов этих работ¹⁾.

Уже в 1823 г. великий русский геометр Н. И. Лобачевский (1793—1856) ясно сознавал беспечность попыток доказать постулат о параллельных. Вскоре он пришел к мысли, что отрицание V постулата вообще ни к какому противоречию не приводит и тем самым вызывает к жизни новую, неевклидову геометрическую систему. Он первый выступил публично с систематическим изложением неевклидовой геометрии. 11 февраля 1826 г. в заседании физико-математического отделения Казанского

¹⁾ История V постулата изложена в книге: В. Ф. Каган, «Лобачевский и его геометрия», М. — Л., 1955, стр. 25—69, 149—164.

университета он изложил основы своего открытия, а в 1829 г. опубликовал в «Казанском вестнике» мемуар «О началах геометрии», содержащий обстоятельное изложение неевклидовой геометрии¹). Независимо от него к неевклидовой геометрии пришел замечательный венгерский математик Я. Больяи (1802—1860), опубликовавший свои результаты в 1832 г. Из переписки Гаусса (1777—1855), изданной лишь после его смерти, стало известно о результатах Гаусса по неевклидовой геометрии²). Однако, опасаясь быть непонятым и осмеянным, он не решился опубликовать их.

Мысль о возможности иной геометрии, кроме евклидовой, настолько опередила свое время, что в течение трех десятилетий неевклидова геометрия оставалась непризнанной и даже незамеченной. Лишь примерно с 60-х годов XIX в. она входит в математический обиход, а в XX в. с появлением теории относительности прочно завоевывает физику.

ЗНАЧЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ В ВОПРОСЕ ОБ ОСНОВАНИЯХ ГЕОМЕТРИИ

В чем непосредственно заключается содержание неевклидовой геометрии? Оказывается, что в геометрии можно отказаться от V постулата, т. е. принять, что в плоскости через всякую точку, взятую вне какой-нибудь прямой, проходит бесчисленное множество прямых, эту прямую не пересекающих. Несмотря на, казалось бы, очевидную неправомерность этого допущения, из него можно неограниченно выводить следствия, доказывать теоремы, не приходя к логическому противоречию. В результате возникает новая, неевклидова геометрия. Правда, многие из теорем этой геометрии еще в большей степени, чем исходное допущение, представляются нам с наглядной точки зрения неправильными, а некоторые — просто чудовищными. Но логически изложение остается безупречным.

Уже это обстоятельство показывает известную автономию логического строения геометрии по отношению к геометрической наглядности, показывает, что логическое развитие геометрии может осуществляться в известной мере независимо и даже вразрез с наглядными представлениями. Но еще большее значение имела другая сторона дела, которой интересовались уже и Гаусс и Лобачевский, а именно, естественно поставить вопрос: если логически обе геометрии — евклидова и неевклидова — строятся безупречно, то ведь в материальном мире должна быть справедлива лишь одна (или, если выражаться точнее, одна из них должна лучше отражать свойства протяженности, чем другая).

¹) Жизнь и творческий путь Лобачевского в широком историческом аспекте показаны в книге: В. Ф. Каган, «Лобачевский», М., 1944, 2-е изд., 1948. См. также П. С. Александров, Николай Иванович Лобачевский. (Краткий очерк жизни и деятельности), в книге «Николай Иванович Лобачевский», М.—Л., 1949, стр. 3—29.

²) См. сборник «Об основаниях геометрии», содержащий соответствующие работы Лобачевского, Больяи и Гаусса (М., 1956).

Так впервые создается положение, типичное и для современной науки: для отображения пространственных форм реального мира математика может предложить на выбор разнообразные схемы (к неевклидовой геометрии Лобачевского дальнейшее развитие науки, как уже упоминалось, добавило другие, более широкие обобщения). Выбор наилучшей среди этих схем должен быть решен, конечно, путем физического опыта. Между тем, пока существовала только одна евклидова геометрия, то, естественно, считали ее безусловно обязательной для природы. Если бы последняя точка зрения не была преодолена, то такой крупный прогресс в физике, как появление теории относительности, стал бы невозможным.

Далее, ясно, что наша интуиция, наши наглядные представления, если даже считать, что они дают нам вполне определенные указания, не могут одновременно соответствовать всем существенно различным между собой геометриям. Поэтому нам остается лишь один выход: возможно полнее использовать логическую связь предложений в области геометрии и обосновать на ней развитие геометрических систем. Это значит, что мы переходим к выше обрисованной аксиоматической точке зрения.

Однако фактическое создание удовлетворительной аксиоматики евклидовой геометрии и решение связанных с ней проблем было далеко не легким делом. В течение последних десятилетий XIX в. ряд ученых посвятил этой проблеме свои усилия (Паш, Пеано, Пиери, Гильберт и др.). Наиболее удачную, глубоко продуманную систему аксиом предложил Гильберт в своем сочинении «Основания геометрии». Эта книга выдержала длительное испытание временем, и в наши дни после ряда поправок система Гильберта остается наиболее целесообразной. Ее мы и положим в основу нашего дальнейшего изложения¹⁾.

АКСИОМАТИКА ГИЛЬБЕРТА (I — IV ГРУППЫ АКСИОМ)

«Основания геометрии» Гильберта вышли в свет в 1899 г.²⁾. Впоследствии Гильберт внес в свою аксиоматику ряд исправлений и уточнений, не меняя, однако, ее характера в чем-либо существенном. Мы дадим здесь обзор его аксиоматики в ее современном виде.

Основная заслуга Гильберта, благодаря которой его труд стал классическим, заключается в следующем. Гильберту удалось сконструировать аксиоматику геометрии, расчлененную настолько естественным

¹⁾ В этой краткой статье нам приходится игнорировать, как и многие другие моменты, историю аналитического направления в области оснований геометрии, связанного с именами Ли и Клейна. Интересующиеся этим вопросом найдут его прекрасное изложение в книге: В. Ф. Каган «Основания геометрии», т. II, «Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии», 1907 [Не смешивать с книгой того же автора и под тем же названием, вышедшей в 1949 г. (т. I) и 1956 г. (т. II).]

²⁾ D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Книга переведена на все языки и выдержала восемь изданий. В 1948 г. вышел перевод на русском языке с 7-го переработанного и дополненного немецкого издания: Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, 491 стр.

образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной. Это расчленение аксиоматики позволяет, во-первых, формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом и, во-вторых, исследовать, как далеко можно развивать геометрию, если класть в ее основу не всю аксиоматику, а те или иные группы аксиом, на которые естественным образом расчленяется аксиоматика. Такого рода логический анализ, выясняющий роль отдельных групп аксиом, действительно проведен Гильбертом в ряде интересных исследований, которые и составляют, в сущности, большую часть его книги.

Кроме того, работа Гильберта дала толчок ряду дальнейших исследований в этом же направлении.

В системе Гильберта рассматриваются вещи трех сортов: «точки», «прямые» и «плоскости», и трех сортов отношения между вещами, выражаемые словами «принадлежит», «между» и «конгруэнтен». Это — основные понятия, и, строго говоря, в системе Гильберта изучаются только указанные вещи и указанные отношения между ними. Все остальные понятия вводятся посредством прямых определений на основе перечисленных шести основных понятий.

Что же представляют собой эти основные понятия? Мы уже говорили о том, что при аксиоматическом построении геометрии мы интересуемся лишь чисто логическим выводом предложений геометрии из некоторого ограниченного их числа. Это особо выделенные предложения принято называть *аксиомами*. Но если выводы из аксиом делаются исключительно по правилам формальной логики, то при этом безразлично, что именно подразумевать под вещами («точка», «прямая», «плоскость») и под отношениями этих вещей («принадлежит», «между», «конгруэнтен»), лишь бы можно было считать, что аксиомы имеют место. В самом деле, формальная логика потому и носит эпитет «формальная», что она учит нас формам умозаключений, правильных независимо от того, о чем именно мы рассуждаем. Это значит, что в формальной логике отражены чрезвычайно общие закономерности реального мира, которые навязываются нашему сознанию с непреодолимой силой потому, что вытекают из бесчисленного количества опытов и наблюдений.

Таким образом, при аксиоматическом построении геометрии, строго логически доказанная теорема остается верной, что бы мы ни понимали под «точками», «прямыми», «принадлежностью точки прямой» и т. д., если только остаются верными аксиомы, на которые мы опирались при доказательстве. В частности, не обязательно связывать с точками, прямыми и т. д. обычные наглядные представления.

Итак, при аксиоматическом построении геометрии под «точками», «прямыми», «плоскостями» и под отношениями «принадлежит», «между», «конгруэнтен» мы понимаем некоторые вещи и отношения, относительно которых известно только то, что они удовлетворяют аксиомам. Для этих вещей и отношений не дается, следовательно, никаких прямых определений; но можно сказать, что

система аксиом косвенным образом характеризует их в совокупности.

Первая группа аксиом содержит восемь аксиом.

Здесь речь идет об отношении «принадлежит», которое в некоторых случаях имеет место между точкой и прямой и точкой и плоскостью. Выражения «точка принадлежит прямой» и «прямая принадлежит точке» означает одно и то же. Для большей свободы языка мы будем вместо термина «принадлежит» пользоваться также и другими формулировками. Например, вместо «прямая a принадлежит каждой из точек A и B » мы будем говорить: «прямая a проходит через точки A и B » или «прямая a соединяет точку A с точкой B »; вместо « A принадлежит a » мы будем говорить: « A лежит на a » или « A является точкой a » и т. п. Если точка A лежит на прямой a и, кроме того, на прямой b , то мы будем также говорить: «прямые a и b пересекаются в точке A », «имеют общую точку a » и т. п. Всё сказанное относится также к взаимной принадлежности точки и плоскости.

Перечислим аксиомы I группы.

I_1 . Для любых двух различных точек A, B существует прямая a , принадлежащая каждой из этих двух точек.

I_2 . Для двух различных точек A, B существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из точек A, B .

I_3 . На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4 . Для любых трех точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует плоскость α , принадлежащая каждой из трех точек A, B, C . Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

I_5 . Для любых трех точек A, B, C , не лежащих на одной и той же прямой, существует не более одной плоскости, принадлежащей этим точкам.

I_6 . Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α , то всякая точка прямой a лежит в плоскости α .

I_7 . Если две плоскости α и β имеют общую точку A , то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B .

I_8 . Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Здесь перечислено всё то, что при построении геометрии нам нужно знать об отношениях «точка принадлежит прямой» и «точка принадлежит плоскости». Совершенно необязательно при этих словах представлять себе маленький шарик, насаженный на длинный стержень, и т. п., равно как необязательно вкладывать в эти слова вообще какой бы то ни было конкретный смысл. Но зато обязательно знать, что если даны две различные точки, то существует одна и только одна прямая, которой принадлежит каждая из этих точек (аксиомы I_1 и I_2) и т. д. Таким образом, некоторое отношение, которое возможно между точкой и прямой, точкой и плоскостью и которое мы

выражаем термином «принадлежит», подчинено лишь тому требованию, что для него должны иметь место восемь аксиом I группы. Связывать же с этим отношением какие-либо другие идеи в принципе необязательно при нашем аксиоматическом построении геометрии.

В этом смысле мы можем сказать, что I группа аксиом служит косвенным определением понятия «принадлежит». Гильберт в дальнейшем пользуется обычно терминологией «лежит на», «проходит через» и т. д. Разумеется, здесь нет никаких новых понятий, а только изменено словесное выражение прежнего понятия. Отношение «прямая принадлежит плоскости» не является основным и вводится при помощи прямого определения: мы говорим, что *прямая принадлежит плоскости, если каждая точка, принадлежащая прямой, принадлежит и плоскости*. В силу аксиомы I_6 такая ситуация возможна. Заметим еще, что аксиома I_8 обеспечивает нам, по крайней мере, трехмерность пространства (несводимость его к плоскости). Напротив, аксиома I_7 устраняет возможную многомерность пространства. В самом деле, в четырехмерном пространстве две двумерные плоскости вполне могут встречаться в одной точке (не имея других общих точек). Но в трехмерном пространстве так «тесно», что две плоскости не в состоянии разойтись от общей точки в разные стороны, не пересекаясь по прямой. Это и выражает аксиома I_7 .

Во II группе аксиом речь идет о некотором отношении, могущем иметь место для одной точки и двух других точек, принадлежащих одной и той же прямой. Это отношение мы называем словом «между».

Π_1 . Если точка B лежит между точками A и C , то A , B , C суть три различные точки одной и той же прямой и B лежит также между C и A .

Π_2 . Для любых двух различных точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B , такая, что точка C лежит между A и B .

Π_3 . Среди любых трех точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Кроме этих аксиом порядка на прямой (линейных аксиом порядка) необходима еще одна аксиома, относящаяся к порядку на плоскости.

Π_4 . Пусть A , B , C — три точки, не лежащие на одной прямой, a — прямая в плоскости ABC , не проходящая ни через одну из точек A , B , C ; если при этом прямая a имеет точку, лежащую между A , B , то она имеет и точку, лежащую или между A , C или между B , C (рис. 1).

Всё, что может потребоваться от понятия «между» при логическом развитии геометрии, исчерпывающе перечислено в этих четырех аксиомах. Наглядное представление о точке, лежащей на прямой между двумя другими, может, следовательно, и не привлекаться без какого-либо принципиального ущерба для разворачивания геометрии. Важнейшую роль в этой группе аксиом играет аксиома Паша (Π_4), характеризующая свойства понятия «между» для отрезков, образу-

щих треугольник (и не уместающихся, следовательно, на одной прямой). Остальные три аксиомы относятся лишь к прямолинейному расположению точек и очень скромны по своему содержанию. Сами по себе они недостаточны, чтобы охарактеризовать отношение «между» даже для точек, расположенных на одной прямой. Они становятся достаточными для этой цели только с привлечением на помощь аксиомы Паша, а следовательно плоскостных построений. Лишь после этого удастся показать линейность расположения точек на прямой, т. е. возможность занумеровать точки любой конечной совокупности так, что всякая точка с номером, промежуточным по отношению к номерам двух других точек, лежит между ними.

На основе понятия «между», характеризуемого аксиомами второй группы, вводятся уже посредством прямых определений понятия: отрезок, луч (полупрямая), угол и полуплоскость.

Отрезок AB определяется как пара точек A, B ; внутренние точки отрезка — как точки, лежащие между A и B ; далее доказывается, что любая точка O на прямой a — разбивает ее остальные точки на два класса таким образом, что O всегда лежит между двумя точками разных классов и никогда не лежит между двумя точками одного и

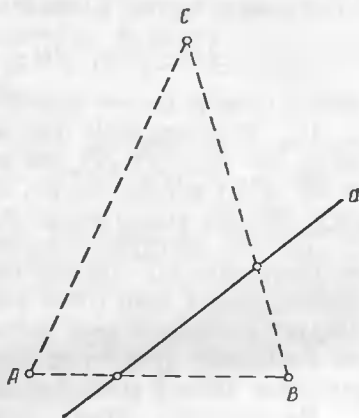


Рис. 1.

того же класса, причем это разбиение единственное. Указанные два класса точек называются *лучами*, на которые точка O разбивает прямую a ; O называется *вершиной* луча.

Угол (h, k) определяется как пара лучей h, k с общей вершиной O , не принадлежащих одной и той же прямой. Совершенно так же, как прямая разбивается точкой на два луча, плоскость разбивается всякой принадлежащей ей прямой на две *полуплоскости*, как это можно строго обосновать на основе аксиом II группы.

При переходе к III группе аксиом мы увидим, что в самой их формулировке участвует уже понятие «между», так как речь идет об отрезках и углах, а определения отрезка и угла содержат понятие «между». Таким образом, отношения «принадлежит» и «между» нужно предполагать уже установленными.

Аксиомы III группы имеют целью формулировать те свойства отношения конгруэнтности, которые были бы достаточны для чисто логического вывода всех теорем, где эти отношения фигурируют.

Мы принимаем, что один отрезок или угол может находиться к другому в определенном отношении, которое обозначается словом «конгруэнтен» (или символом \equiv) и относительно которого известно только то, что оно подчиняется следующим пяти аксиомам III группы.

III₁. Если даны отрезок AB и луч h' с вершиной A' , то на h' существует точка B' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$:

$$AB \equiv A'B'.$$

Эта аксиома дает возможность откладывать отрезки (однозначность такого откладывания доказывается позже).

Отрезок был определен просто как система двух точек, которая обозначалась через AB или через BA . О порядке, в котором эти точки следуют одна за другой, в определении ничего не говорилось; поэтому записи

$$AB \equiv A'B', \quad AB \equiv B'A', \quad BA \equiv A'B', \quad BA \equiv B'A'$$

имеют один и тот же смысл.

III₂. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB , то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также и отрезку $A''B''$; короче говоря, если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны также друг другу (в любом порядке).

Так как конгруэнтность вводится здесь впервые этими аксиомами, то конгруэнтность любого отрезка самому себе сначала отнюдь не представляется само собой разумеющимся фактом; однако этот факт следует из первых двух аксиом конгруэнтности: отложим отрезок AB на каком-либо луче, т. е. построим отрезок $A'B'$, конгруэнтный AB , и применим затем к конгруэнтности $AB \equiv A'B'$ и $AB \equiv A'B'$ аксиому III₂.

На основании этого получается далее с помощью применения аксиомы III₂, что конгруэнтность отрезков обладает свойствами симметрии и транзитивности, т. е. что справедливы теоремы:

$$\text{если } AB \equiv A'B', \text{ то } A'B' \equiv AB.$$

Действительно, достаточно применить аксиому III₂ к соотношениям:

$$AB \equiv A'B', \quad A'B' \equiv A'B'.$$

Столь же просто убедиться, что

$$\text{если } AB \equiv A'B', \quad A'B' \equiv A''B'', \text{ то } AB \equiv A''B''.$$

Вследствие симметрии конгруэнтности отрезков можно пользоваться выражением: два отрезка «конгруэнтны друг другу».

III₃. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a , причем B лежит между A и C , и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a' , причем B' лежит между A' и C' ; если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то и $AC \equiv A'C'$.

Эта аксиома выражает возможность складывать отрезки с однозначным результатом (с точностью до замены отрезка ему конгруэнтным).

Откладывание углов трактуется совершенно так же, как и откладывание отрезков. Правда, кроме возможности откладывания углов приходится аксиоматически потребовать ее и единственность такого откладывания; тогда транзитивность и возможность складывания углов доказуемы.

III₄. Пусть даны угол (\hat{h}, \hat{k}) в плоскости α и луч h' в плоскости α' , а также указана одна определенная полуплоскость из тех двух полуплоскостей, на которые разбивается плоскость α' прямой a' , содержащей луч h' . Тогда из вершины O' луча h' исходит один и только один луч k' , принадлежащий указанной полуплоскости и такой, что угол (\hat{h}, \hat{k}) конгруэнтен углу (\hat{h}', \hat{k}') :

$$(\hat{h}, \hat{k}) \equiv (\hat{h}', \hat{k}').$$

Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда

$$(\hat{h}, \hat{k}) \equiv (\hat{h}, \hat{k}).$$

Короче говоря, каждый угол может быть отложен одним-единственным способом в заданной плоскости при заданном луче по заданную его сторону.

При определении угла мы не обращали внимания на направление вращения, подобно тому как при определении отрезка мы не обращали внимания на его направление. Поэтому записи

$$(\hat{h}, \hat{k}) \equiv (\hat{h}', \hat{k}'), (\hat{h}, \hat{k}) \equiv (\hat{k}', \hat{h}'), (\hat{k}, \hat{h}) \equiv (\hat{h}', \hat{k}'), (\hat{k}, \hat{h}) \equiv (\hat{k}', \hat{h}')$$

имеют один и тот же смысл.

Угол с вершиной в точке B , на одной стороне которого лежит точка A , а на другой — точка C , обозначается также символом \widehat{ABC} , или, короче, \hat{B} .

III₅. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, то имеет место также и конгруэнтность $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. (Под треугольником мы понимаем тройку точек, не принадлежащих одной прямой.)

Переменив обозначения, мы найдем, что при выполнении условий последней аксиомы всегда имеют место следующие две конгруэнтности: $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$.

Подчеркнем, что мы не имеем права приписывать понятию конгруэнтности даже самых «очевидных» свойств (что всякий отрезок конгруэнтен самому себе; что если первый угол конгруэнтен второму, то второй конгруэнтен первому и т. д.), пока эти свойства не доказаны совершенно строгим образом на основании аксиом. Между прочим второе из приведенных в скобках утверждений доказывается довольно поздно — после ряда других теорем. До тех пор нельзя считать, что $(\hat{h}, \hat{k}) \equiv (\hat{h}', \hat{k}')$ и $(\hat{h}', \hat{k}') \equiv (\hat{h}, \hat{k})$ означает одно и то же.

Первые три аксиомы III группы относятся к конгруэнтности отрезков, четвертая — к конгруэнтности углов. Особенно важную роль

играет аксиома III_5 — единственная, устанавливающая связь между конгруэнтностью отрезков и конгруэнтностью углов.

Четвертая группа аксиом состоит из единственной аксиомы, именно аксиомы параллельности.

IV. Пусть a — произвольная прямая, а A — точка, лежащая вне ее; в таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

Присоединение этой аксиомы превращает нашу геометрию в евклидову; напротив, отрицание этой аксиомы приводит нас к геометрии Лобачевского.

ПЯТАЯ ГРУППА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА — АКСИОМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ. НЕАРХИМЕДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Совершенно особое положение занимают аксиомы V группы (аксиомы непрерывности), завершающие список аксиом Гильберта. В первом издании в этой группе имелась лишь одна аксиома, именно V_1 — известная аксиома Архимеда: «откладывая достаточное число раз отрезок, конгруэнтный данному, можно превзойти любой наперед заданный отрезок». Текстуально Гильберт формулирует эту аксиому так:



Рис. 2.

V_1 . Пусть AB и CD — два каких-нибудь отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число точек A_1, A_2, \dots, A_n , таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n (рис. 2).

Может показаться странным, что сначала Гильберт не обратил внимания на недостаточность этих аксиом для построения евклидовой геометрии в обычном смысле слова. Действительно, возьмем обычное евклидово пространство, отнесенное к прямоугольным декартовым координатам x, y, z , и выкинем из него все точки, кроме тех, для которых все три координаты x, y, z суть алгебраические числа¹⁾. Не представит труда проверить, что в таком «изрешеченном» пространстве сохраняют свою силу все аксиомы Гильберта, а между тем пространство будет неполным.

Этот пробел в аксиоматике был указан Гильберту некоторыми авторами (Пуанкаре, 1902), после чего во второе издание «Оснований геометрии» была введена еще одна аксиома: аксиома полноты V_2 :

¹⁾ См. «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 35. (Прим.ред.)

V_2 . Совокупность точек, прямых и плоскостей нельзя дополнить новыми элементами так, чтобы в расширенной совокупности по-прежнему имели место все предыдущие аксиомы и чтобы отношения «принадлежит», «между», «конгруэнтен» в применении к старым объектам имели прежний смысл¹⁾.

Такое, казалось бы, странное явление, как пропуск аксиомы полноты в первом издании, находит себе объяснение, если ознакомиться с содержанием книги в целом. Дело в том, что, по существу, центральной идеей книги Гильберта является развитие геометрии независимо от аксиом непрерывности. Поэтому отсутствие аксиомы полноты не приводило к фактическим ошибкам или пробелам в доказательствах; после введения этой аксиомы она остается мертворожденной и нигде в изложении не применяется.

Сама формулировка аксиомы полноты весьма искусственна и сразу обличает ее цель — придать системе аксиом формальную законченность, заполнить те «скважины» в пространстве, которые возможны, как было указано выше, если ограничиться предыдущими аксиомами.

Основная идея этой аксиомы заключается в том, что, грубо говоря, запрещается рассматривать пространство неполное, пространство, из которого выкинута часть точек, прямых и плоскостей. Именно эту возможность и требовалось устранить²⁾.

Мы видим, что аксиомы непрерывности занимают совсем особое место в аксиоматике Гильберта; они являются ее пасынками, без них автор охотно обходится: без аксиомы полноты — всегда, без аксиомы Архимеда — большей частью. Мы должны здесь ближе рассмотреть весьма глубокие причины этого явления.

Если ограничиться аксиомами I—IV, то весьма характерным явлением для аксиоматики Гильберта будет фактическое отсутствие понятия о бесконечном множестве. Правда, сам автор часто дает формулировки, которые естественно понять в смысле теории множеств. Например, первые слова сочинения Гильберта «Мы мыслим три различные системы вещей...» естественно понять так, что рассматриваются три каких-то множества. Однако такого рода формулировки остаются, по существу, в области деклараций, а фактическое изложение идет мимо них. В самом деле, присмотримся ближе к характеру изложения с этой точки зрения. Прежде всего очень важно, что Гильберт отказался от понимания прямых и плоскостей, как составленных из точек бесконечных множеств, а ввел прямую и плоскость как самостоятельные основные понятия, а в таком случае в формулировке любой аксиомы и в доказательстве любой элементарно-геометрической теоремы фигурирует, очевидно, лишь конечное число точек (равно как прямых и плоскостей), и понятие о бесконечном

¹⁾ В последнем издании «Оснований геометрии» аксиома формулирована в несколько упрощенном виде, как аксиома линейной полноты.

²⁾ При наличии предыдущих аксиом аксиома полноты эквивалентна хорошо известным аксиомам Кантора и Дедекинда (каждой из них).

множестве остается праздным. В частности, нет никакой надобности мыслить, например, множество всех точек на прямой, на плоскости, в пространстве (такое множество необходимо было бы бесконечным). Ни в одной из аксиом множества такого рода не фигурируют. Если же в каком-нибудь предложении утверждается существование (или несуществование) точки с таким-то свойством (например, точки, лежащей между двумя данными), то это нужно понимать непосредственно в смысле разрешения (или запрещения) рассматривать точку с данным свойством. Совершенно необязательно представлять себе при этом множество всех точек, в котором как элемент существует (или не существует) точка с данным свойством.

Точно так же, рассматривая, например, разбиение прямой на два луча посредством взятой на ней точки O , нет надобности говорить о разбиении на две части множества всех точек на прямой (кроме O). По существу, речь идет о том, что, строя в процессе наших рассуждений точки на прямой, мы про каждые две из них A и B можем сказать, лежат ли они на разных полупрямых, определяемых точкой O (когда O лежит между A , B), или на одной полупрямой (когда O между A и B не лежит). Другими словами, разбиение на два класса осуществляется для всех точек, фактически встречающихся в наших рассуждениях, как бы далеко мы их ни продолжали, и этого для нас достаточно. Но таких точек будет всегда лишь конечное число, и понятие о бесконечной совокупности всех точек прямой снова остается излишним.

Рассматривая аналогичным образом шаг за шагом всё изложение, мы убеждаемся, что, по существу, везде речь идет о конечных конструкциях, законы построения которых дают нам аксиомы. Ничто, по существу, не вынуждает нас прибегать к понятиям теории множеств.

Всё сказанное относится — напомним — к аксиомам I—IV и к той части геометрии, которая вытекает из них. Совсем иначе обстоит дело с аксиомами непрерывности V, и тут лежит пронасть, отделяющая их от предшествующих. Аксиомы непрерывности существенно предполагают понятие о бесконечном множестве, без чего они не могут быть сформулированы. Действительно, в формулировке аксиомы полноты прямо говорится о множестве всех точек (в случае аксиомы линейной полноты — о множестве всех точек на прямой). Теоретико-множественная точка зрения, в противоположность аксиомам I—IV групп, лежит здесь в самом фундаменте.

Но и более безобидная, казалось бы, аксиома Архимеда тоже предполагает понятие о бесконечном множестве. В самом деле, мы берем какой-то отрезок A_0A_1 и какой-то отрезок CD . Мы начинаем затем строить на луче A_0A_1 последовательно точки A_2, A_3, \dots так, что $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ конгруэнтны A_0A_1 . Мы утверждаем, что в построенной последовательности найдется такая точка A_n , что отрезок A_0A_n превзойдет CD .

В каждом отдельном случае нам понадобится, таким образом, лишь конечное число точек A_0, A_1, \dots, A_n . Но когда мы формули-

руем аксиому в общем виде, то мы должны охватить все возможные случаи, а среди них будут встречаться случаи со сколь угодно большими номерами n .

Следовательно, в общей формулировке аксиомы нам нельзя иметь в виду лишь часть последовательности $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$, а приходится брать эту бесконечную последовательность целиком и утверждать, что в ней находятся точки с требуемым свойством $A_0 A_n > CD$. Мы не сможем, таким образом, формулировать аксиому Архимеда, не имея понятия о бесконечной последовательности.

Возникает вопрос: в каком смысле существенно, что аксиомы I—IV в противоположность аксиомам V не требуют теоретико-множественных понятий.

Развивая геометрию на основе аксиом I—IV, мы можем опираться на законы формальной логики, применяя их только к фактически рассматриваемым в доказательствах всегда конечным, вполне обозримым конструкциям. Все рассуждения благодаря этому носят совершенно прозрачный характер, и у нас не возникает ни малейшего повода к какому-либо неясностям.

Напротив, принимая аксиомы V, мы вынуждены существенным образом иметь в поле зрения и бесконечные множества. И это вносит уже некоторую неясность принципиального характера: мы хотим обосновать геометрию, а между тем опираемся на теорию множеств, которая сама нуждается в обосновании, как и всякая математическая теория. Возникает необходимость расширить круг исследования, и во всяком случае та полная прозрачность, свойственная конечным конструкциям, теперь исчезает.

Мы не ставим себе целью входить более глубоко в эти вопросы, но и сказанное выясняет принципиальный характер того осложнения в основах геометрии, которое вносится аксиомами непрерывности V_1 и V_2 .

Крупнейшим достижением Гильберта в области логического анализа геометрии явилось как раз то, что он обнаружил возможность развить геометрию во всём существенном, не пользуясь аксиомами непрерывности.

Геометрию, лишенную аксиом непрерывности, мы будем называть *неархимедовой геометрией*: по существу, именно ей и посвящена книга Гильберта ¹⁾.

Пока мы доказываем первые, наиболее элементарные теоремы, мы даже не замечаем отсутствия аксиом непрерывности. Однако положение меняется с того момента, когда нам приходится рассматривать отношение отрезков, т. е. измерять один отрезок другим, принятым за единицу (а это необходимо в теории подобия и теории площадей).

¹⁾ Сам Гильберт употребляет термин «неархимедова геометрия» обычно в несколько более узком смысле: в смысле такой геометрии, где аксиомы непрерывности не только не используются, но и заведомо неверны.

В обычном изложении эта задача решается путем привлечения в геометрию числа, а именно: каждой паре отрезков AB , CD хорошо известным способом относится действительное число, выражающее их отношение. Поделив один отрезок, например AB , на n равных частей, мы откладываем отрезок $\frac{AB}{n}$ последовательно до тех пор, пока не получим отрезка, превосходящего CD . Пусть это случится впервые, когда отрезок $\frac{AB}{n}$ отложен $m+1$ раз. Тогда можно доказать, что $\frac{m+1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к определенному пределу; этот предел и называется *отношением* $\frac{CD}{AB}$.

Мы видим, что это построение существенно предполагает аксиому Архимеда: в неархимедовой геометрии возможно такое положение вещей, что сколько бы мы ни откладывали отрезок $\frac{AB}{n}$, мы никогда не превзойдем отрезка CD , а следовательно не сможем определить и числа $m+1$. Возможно также, что как бы велико n мы ни брали, $\frac{AB}{n}$ будет больше отрезка CD , так что $m+1$ всегда равно 1, и в качестве отношения $\frac{CD}{AB}$ придется принять нуль, хотя отрезок CD не вырождается в точку.

Таким образом, *в неархимедовой геометрии мы не можем характеризовать отношение отрезков числом по обычному способу*. Тем самым мы теряем возможность говорить о пропорциональности отрезков в обычном смысле слова (равенство отношений), и теория подобия становится беспредметной. Невозможным становится также и измерение площадей, так как понятие об отношении площадей рушится по совершенно аналогичным причинам. Кроме того, выражение, например, площади треугольника полупроизведением основания на высоту теряет смысл уже потому, что у нас отсутствуют численные выражения для основания и высоты (в обычном изложении — это отношения отрезков основания и высоты к отрезку, принятому за единицу длины).

Гильберт обходит эту трудность весьма интересным и, главное, естественным и геометричным методом. Он обнаруживает, что и нет необходимости опираться в геометрии на понятие числа; что средствами самой геометрии можно создать исчисление (исчисление отрезков), которое предоставит нам те же удобства, что и арифметика действительных чисел. Делается это следующим образом.

Объектами нашего исчисления будут служить *отрезки, рассматриваемые с точностью до замены конгруэнтными отрезками*; другими словами, положение отрезка в пространстве нам не важно, а интересуют нас, грубо говоря, лишь его размеры.

Сложение двух или нескольких отрезков a , b , ... осуществляется обычным способом путем прикладывания отрезков друг к другу,

причем составной отрезок принимается за сумму составляющих; однозначность этой операции обеспечивается аксиомой III_8 . Нетрудно показать, что при этом $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$. Далее, один из отрезков раз навсегда фиксируем и будем называть единицей. Ему предназначается важная роль в операции умножения отрезков (рис. 3). На одной стороне прямого угла от его вершины O откладываем отрезки 1 , b , на другой — отрезок a , и через конец отрезка b проводим параллель прямой $1, a$; точку, полученную ее пересечением с другой стороной прямого угла, принимаем за конец отрезка ab .

Этим путем определяется *произведение* двух произвольных отрезков a , b , заданных в определенном порядке. Как расположен прямой угол, на котором осуществляется эта конструкция, для результата безразлично.

Итак, произведение отрезков определено; можно доказать, что при этом $ab = ba$, $(ab)c = a(bc)$, $(a + b)c = ac + bc$.

Построенное исчисление отрезков аналогично арифметике положительных чисел; если ввести теперь «отрезок-нуль» и «отрицательные отрезки» (аналогично тому, как в элементарной алгебре вводятся отрицательные числа) и распространить на них — также обычными приемами — операции сложения и умножения, то наши отрезки в совокупности образуют, как можно доказать, *поле* в смысле современной алгебры. Над отрезками мы можем производить, таким образом, операции сложения и вычитания, умножения и деления на тех же правах, как и над вещественными числами. Более того, наши отрезки образуют *упорядоченное поле*, т. е. между отрезками можно ввести естественным геометрическим образом отношения $>$ («больше»), которое имеет место для любых двух неконгруэнтных отрезков a , b , взятых в том или другом порядке (или $a > b$, или $b > a$); при этом, грубо говоря, отношение $>$ обладает всеми теми же свойствами, как и для вещественных чисел (например, из $a > b$, $b > c$ следует $a > c$; из $a > b$ и $c > 0$ следует $ac > bc$ и т. д.).

Подчеркнем, что всего этого мы достигаем лишь на основе аксиом I, II, III, IV групп, т. е. без использования идей непрерывности (геометрия неархимедова). И хотя наши «отрезки» — не числа, но тот факт, что они образуют упорядоченное поле, позволяет использовать их в геометрии почти что так же хорошо, как и числа, а именно:

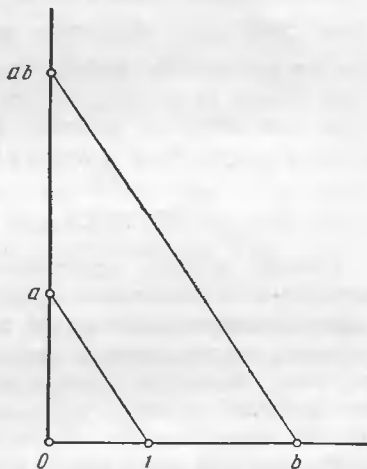


Рис. 3.

если раньше отношение отрезков выражалось числом, то теперь оно будет выражаться отрезком, и, пользуясь этим, мы строим теорию подобия по обычному образцу без каких-либо затруднений. Площадь треугольника и многоугольника, выражавшаяся раньше числом (при выбранной единице площади), будет выражаться теперь отрезком, и это позволяет развить теорию площадей.

Отрезки, выражающие отношения отрезков и площади фигур, конечно, зависят от выбора отрезка, принятого за единицу. Однако в окончательные геометрические результаты, можно считать, входят лишь пропорции (равенства отношений) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, которые не нарушаются при другом выборе единичного отрезка.

В общем итоге оказывается, что элементарная геометрия довольно слабо опирается на аксиомы V группы, — *всё самое существенное удается получить и в неархимедовой геометрии.*

ПРОБЛЕМА НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

Первый вопрос, естественно встающий перед нами при чисто логическом развертывании геометрии на основе аксиом, это вопрос о *непротиворечивости* нашей аксиоматики. Гарантированы ли мы от появления противоречий в нашей системе; не может ли случиться, что у нас окажется доказанной какая-нибудь теорема и одновременно ее отрицание? В этом случае наша аксиоматика не имела бы конечно никакой цены.

Первое, что здесь можно доказать: *евклидова геометрия во всяком случае непротиворечива, если непротиворечива арифметика вещественных чисел.* Это доказывается при помощи следующей арифметической интерпретации геометрии.

Мы уже подчеркивали, что при аксиоматическом построении геометрии ее выводы останутся верными, как бы мы ни истолковали основные понятия, лишь бы эти понятия удовлетворяли нашим аксиомам. Применим эту идею следующим образом: условимся понимать под «точкой» упорядоченную тройку вещественных чисел (x, y, z) ; под «плоскостью» — линейное уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

заданное с точностью до замены эквивалентным уравнением (вещественные числа A, B, C одновременно в нуль не обращаются); под «прямой» — пару совместных и линейно независимых линейных уравнений вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad (2)$$

заданных с точностью до замены эквивалентной системой того же вида; условимся говорить, что точка «принадлежит» плоскости или прямой, если тройка чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению (1) или

соответственно системе (2); что точка Q лежит «между» точками P, R , если все три точки различны, принадлежат одной и той же прямой, причем имеет место, по крайней мере, одно из шести соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x_P < x_Q < x_R, & \quad y_P < y_Q < y_R, & \quad z_P < z_Q < z_R, \\ x_P > x_Q > x_R, & \quad y_P > y_Q > y_R, & \quad z_P > z_Q > z_R; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

наконец, «конгруэнтность» отрезков $PQ \equiv ST$ мы определяем как равенство чисел

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} = \\ & = \sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

а конгруэнтность углов $\widehat{PQR} = \widehat{STU}$ — как равенство чисел

$$\begin{aligned} & \frac{(x_P - y_Q)(x_R - x_Q) + (y_P - y_Q)(y_R - y_Q) + (z_P - z_Q)(z_R - z_Q)}{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2 + (z_R - z_Q)^2}} = \\ & = \frac{(x_S - x_T)(x_U - x_T) + (y_S - y_T)(y_U - y_T) + (z_S - z_T)(z_U - z_T)}{\sqrt{(x_S - x_T)^2 + (y_S - y_T)^2 + (z_S - z_T)^2} \sqrt{(x_U - x_T)^2 + (y_U - y_T)^2 + (z_U - z_T)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что наше истолкование основных понятий представляет собой откровенный плагиат из области аналитической геометрии в пространстве. И тем не менее здесь налицо коренная разница: в аналитической геометрии мы предполагаем евклидову геометрию уже установленной, и, например, числа (координаты) x, y, z лишь отмечают положение точки, существующей совершенно независимо от них; в нашем же случае мы под самой точкой понимаем тройку чисел (x, y, z) и ничего более; в аналитической геометрии соотношения (3) выражают лишь признак того, что из трех точек P, Q, R , лежащих на одной прямой, точка Q лежит между P и R ; самый же факт «расположения между» имеет самостоятельный геометрический смысл; в нашем же случае соотношения (3) принимаются за самый смысл «положения между», и никакого другого смысла в это не вкладывается. То же относится к истолкованию и других основных понятий.

Если теперь мы наберемся достаточного терпения, чтобы прочитывать текст всех наших аксиом, заменив в их формулировках термины «точка», «прямая», «плоскость», «принадлежит», «между», «конгруэнтность» в соответствии с нашим арифметическим истолкованием, то убедимся, что аксиомы превращаются в верные арифметические предложения. Так, например, аксиома I_1 принимает следующий вид: для любых двух различных упорядоченных троек чисел (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) можно составить систему уравнений вида (2), линейно независимых между собой, причем обе тройки чисел этой системы удовлетворяют, — предложение, как легко показать, верное. То же относится и к другим аксиомам (хотя проверка некоторых из них и будет сложнее).

Допустим теперь на минуту, что аксиоматика Гильберта приводит к противоречию, т. е. на основе ее аксиом удастся одновременно и доказать и опровергнуть некоторое предложение A . Но так как в арифметической интерпретации аксиомы Гильберта превращаются в верные арифметические предложения, то получается, что, исходя из этих предположений, можно логически и доказать и опровергнуть предложение A (в нашей интерпретации A — тоже арифметическое предложение). Таким образом, противоречие — если бы оно имело место в евклидовой геометрии — немедленно перекочевало бы в арифметику вещественных чисел и разрушило бы базис, в сущности, всей математики.

Поэтому, если считать арифметику вещественных чисел непротиворечивой, то отсюда неизбежно следует непротиворечивость и евклидовой геометрии. Совершенно так же обнаруживается и непротиворечивость геометрии Лобачевского — непосредственно путем (другой, конечно) арифметической интерпретации или посредством интерпретации в евклидовой геометрии (известные модели Клейна или Пуанкаре).

Однако наши результаты носят условный характер: всё упирается в проблему непротиворечивости арифметики вещественных чисел.

Более того, так как, исходя из аксиом, мы делаем умозаклучения по законам логики, то, желая установить непротиворечивость той или иной системы, мы должны одновременно с математическим содержанием подвергнуть исследованию и самую логику.

Пути и методы исследования этой задачи были намечены Гильбертом и его школой и развились в настоящее время в большую отрасль математики — *математическую логику*. Основная идея заключается здесь в следующем. Предложения математики, равно как и законы логики, записываются при помощи особой символики в виде формул без всякого участия словесных выражений. Процессы логического мышления заменяются манипуляциями с такого рода формулами по строго очерченным правилам, а именно: из формул, уже построенных, разрешается чисто механически, по точно указанным рецептам составлять новые формулы, и это заменяет сознательные умозаклучения, выводящие из одного предложения другое. Таким образом, и математическое, и логическое содержание исследуемого отдела математики предстает перед нами в виде цепи формул. Эта цепь начинается с формул, изображающих математические и логические аксиомы, и может быть неограниченно продолжаема путем механического составления новых формул. Нам нет при этом надобности помнить, какое математическое содержание записано под видом той или иной формулы; нас интересует лишь формула сама по себе как вполне конкретная и обозримая конечная комбинация знаков. Именно с этих позиций математическая логика подходит к проблеме непротиворечивости: требуется доказать, что в цепи формул не может появиться формула, изображающая противоречие.

Здесь мы должны остановиться; затронутые вопросы далеко выходят за пределы нашей элементарной темы и в настоящее время всё

еще не являются окончательно решенными. Более того, пути их решения оказались совсем не столь гладкими, как когда то представлял себе Гильберт; здесь обнаружено немало подводных камней, глубоко усложнивших задачу.

О НЕЗАВИСИМОСТИ АКСИОМ

Мы уже говорили о том, что естественно желать, чтобы система аксиом была минимальной в смысле заключенных в ней требований, чтобы в числе этих требований не было излишних. Если этой идее дать точную формулировку, то мы придем к понятию *независимости* аксиом.

Мы говорим, что *данная аксиома является независимой от остальных аксиом* (или от их части), *если она не может быть выведена из этих аксиом как их логическое следствие*. Таким образом, аксиома, независимая от остальных аксиом, ни в коем случае не может быть безнаказанно выкинута из аксиоматики данной геометрической системы: утрата ее невозмездима, так как то, что она содержала, невозможно восстановить за счет оставшихся аксиом.

Идеальным положением вещей в смысле сведения системы аксиом к минимуму было бы такое, когда каждая из аксиом была бы независима от остальных. В этом случае мы действительно были бы уверены, что в нашей аксиоматике невозможны больше никакие сокращения, и всякое сокращение повело бы к ослаблению аксиоматики по существу, а тем самым и к изменению геометрической системы.

Однако такое положение вещей недостижимо до конца в интересующем нас случае аксиоматики Гильберта. Дело в том, что, например, при формулировке аксиом II группы, относящихся к понятию «между», предполагается, что уже установлено понятие «принадлежит» со свойствами, описанными в I группе аксиом, а при формулировке аксиом конгруэнтности (III группа) предполагается, кроме того, что и понятие «между» уже установлено аксиомами II группы. Такого рода предположение существенно иногда уже для самой возможности формулировать аксиомы III группы; так, в формулировке аксиомы III_4 фигурирует понятие полуплоскости, которое невозможно установить без использования аксиом II группы.

Поэтому было бы бессмысленно даже ставить вопрос, например, о независимости аксиомы Паша II_4 от аксиомы III группы: нельзя пытаться доказать, что аксиома Паша не вытекает (или вытекает) из этих аксиом, так как уже, чтобы их формулировать, нужно заранее предположить справедливость аксиомы Паша.

Вряд ли это можно считать существенным недостатком; дело в том, что требование независимости аксиом (в отличие от требования непротиворечивости) скорее представляет собой некоторую роскошь, чем жизненную необходимость. Лишь в некоторых случаях доказательство независимости той или иной аксиомы от остальных приобретает принципиальную важность. Здесь прежде всего речь идет

о независимости аксиомы параллельности IV от всех остальных аксиом. На этом примере мы и разъясним общий прием, употребляющийся для доказательства независимости той или иной аксиомы.

Рассмотрим новую систему, в которой все аксиомы — те же самые, что и в системе Гильберта, кроме аксиомы параллельности, вместо которой помещено ее отрицание (т. е. утверждается, что можно указать такую прямую и точку вне ее, что через точку можно провести более одной прямой, не пересекающей данную прямую и лежащей с ней в одной плоскости).

Представим себе, что мы установили непротиворечивость этой новой системы аксиом. Отсюда сейчас же следует, что аксиома параллельности независима от остальных аксиом. В самом деле, если бы она была их следствием, то она вытекала бы и из новой системы аксиом (в которой все прежние аксиомы, кроме аксиомы параллельности, содержатся), а так как в новой системе аксиом содержится и отрицание аксиомы параллельности, то новая система аксиом вопреки установленному содержала бы противоречие.

Итак, для доказательства независимости данной аксиомы от остальных достаточно доказать непротиворечивость той системы аксиом, которая получается, если данную аксиому заменить ее отрицанием, а остальные аксиомы оставить без изменения. В нашем случае задача сводится, очевидно, к доказательству непротиворечивости неевклидовой геометрии Лобачевского, а этот вопрос решается посредством модели Клейна или Пуанкаре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы аксиоматики элементарной геометрии, которыми мы сейчас занимались, были злободневными вопросами математической науки на рубеже XIX и XX в. С тех пор прошло много времени, и современная наука для создания нужных ей геометрических теорий в основном пользуется аналитическими конструкциями, или, если угодно, аксиоматикой, облеченной в аналитическую форму (как, например, в римановой геометрии, в теории относительности). Такого рода аксиоматика гораздо более гибка, удобна для обращения и отличается большей общностью, чем элементарная.

Тем не менее элементарная аксиоматика не потеряла и никогда не потеряет своего значения как одно из классических достижений математической науки, как школа научного мышления и, самое главное, как необходимое уточнение школьного курса геометрии, как логическое завершение тех первоначальных геометрических знаний, которыми овладевает каждое новое поколение и которые так необходимы везде: начиная с простейших шагов практической деятельности и кончая наиболее тонкими и сложными научными техническими расчетами.

АРХИТЕКТУРА МАТЕМАТИКИ ¹⁾

Николай Бурбаки

(Nikolas Bourbaki, Франция — США)

МАТЕМАТИКА ИЛИ МАТЕМАТИКИ? ²⁾

Дать в настоящее время общее представление о математической науке — значит заняться таким делом, которое, как кажется, с самого начала наталкивается на почти непреодолимые трудности благодаря обширности и разнообразию рассматриваемого материала. В соответствии с общей тенденцией в науке с конца XIX в. число математиков и число работ, посвященных математике, значительно возросло. Статьи по чистой математике, публикуемые во всем мире в среднем в течение одного года, охватывают многие тысячи страниц. Не все они имеют, конечно, одинаковую ценность; тем не менее после очистки от неизбежных отбросов оказывается, что каждый год математическая наука обогащается массой новых результатов, приобретает всё более разнообразное содержание и постоянно дает ответвления в виде теорий, которые беспрестанно видоизменяются, перестраиваются, сопоставляются и комбинируются друг с другом. Ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраниваются в каком-либо закоулке математической науки,

¹⁾ Перевод статьи «L'Architecture des mathématiques», напечатанной в сборнике «Les grands courants de la pensée mathématiques», изданном F. La Lionnais (Cahiers du Sud, 1948, стр. 35 — 47). Авторизованный перевод этой статьи на английский язык «The Architecture of Mathematics», сделанный A. Dresden, был напечатан в журнале «The American Mathematical Monthly» (т. 57, № 4, 1950, стр. 221 — 232) со следующим указанием об ее авторе:

«Профессор Н. Бурбаки, бывший член Королевской Полдавской академии (Royal Poldavion Academy), ныне проживающий в Нанси (Франция), является автором обширного руководства по современной математике, выходящего под названием «Eléments de Mathématique» (Herman et Cie, Paris, 1939), десять томов которого уже вышли в свет».

Более полные и достоверные сведения об авторе (вернее — авторах) статьи читатель найдет в статье П. Халмоша, напечатанной в настоящем выпуске «Математического просвещения» на стр. 229—239.

²⁾ La Mathématique ou les Mathématiques? (т. е. одна математика или несколько математик?). (Прим. перев.)

откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют всё то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них. Нет такого математика, даже среди обладающих самой обширной эрудицией, который бы не чувствовал себя чужеземцем в некоторых областях огромного математического мира; что же касается тех, кто подобно Пуанкаре или Гильберту оставляет печать своего гения почти во всех его областях, то они составляют даже среди наиболее великих редчайшее исключение.

Поэтому даже не возникает мысли дать неспециалисту точное представление о том, что даже сами математики не могут постичь во всей полноте. Но можно спросить себя, является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днем приобретает всё больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему всё дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики; не находится ли эта последняя на пути превращения в Вавилонскую башню, в скопление автономных дисциплин, изолированных друг от друга как по своим методам, так и по своим целям и даже по языку? Одним словом, существуют в настоящее время *одна* математика или *несколько* математик?

Хотя в данный момент этот вопрос особенно актуален, ни в коем случае не надо думать, что он нов; его ставили с первых же шагов математической науки. Ведь, действительно, если даже не принимать в расчет прикладной математики, между геометрией и арифметикой (по крайней мере, в их элементарных разделах) существует очевидная разница в происхождении, поскольку последняя вначале была наукой о *дискретном*, а первая — наукой о *непрерывной* протяженности (два аспекта, которые были коренным образом противопоставлены друг другу после открытия иррациональностей). Именно это открытие оказалось роковым для первой попытки унификации нашей науки — арифметизации пифагорейцев («все вещи суть числа»).

Мы бы зашли слишком далеко, если бы от нас потребовали проследить те превратности судьбы, которым подвергалась унитарная концепция математики от пифагорейцев до наших дней. Кроме того, это — работа, к которой более подготовлен философ, чем математик, так как общей чертой всех попыток объединить в единое целое математические дисциплины — всё равно, идет ли речь о Платоне, о Декарте или Лейбнице, об арифметизации или логистике XIX в., — является то, что они делались в связи с какой-либо более или менее претенциозной философской системой, причем исходным пунктом для них всегда служили априорные воззрения на отношения между математикой и двойной действительностью внешнего мира и мира мысли. Самое лучшее, что мы сумеем сделать, — это отослать читателя по этому вопросу к историческому и критическому исследованию Л. Бруншвига

«Этапы математической философии»¹⁾). Наша задача более скромна и более точно очерчена; мы намереваемся остаться внутри математики и искать ответ на поставленный вопрос, анализируя ее собственное развитие.

ЛОГИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

После более или менее очевидного банкротства различных систем, на которые мы указывали выше, в начале этого века, казалось, почти полностью отказались от взгляда на математику как на науку, характеризующую единым предметом и единым методом; скорее наблюдалась тенденция рассматривать ее как «ряд дисциплин, основывающихся на частных, точно определенных понятиях, связанных тысячами нитей»²⁾), которые позволяют методам, присущим одной из дисциплин, оплодотворять одну или несколько других. В настоящее время, напротив, мы думаем, что внутренняя эволюция математической науки вопреки внешности более чем когда-либо упрочила единство ее различных частей и создала своего рода центральное ядро, которое является гораздо более связным целым, чем когда бы то ни было. Существенное в этой эволюции заключается в систематизации отношений, существующих между различными математическими теориями; ее итогом явилось направление, которое обычно называют «аксиоматическим методом».

Иногда говорят также «формализм» или «формалистический метод»; но необходимо с самого начала остерегаться путаницы, которую вызывают эти недостаточно четко определенные слова и которая и без того часто используется противниками аксиоматического метода. Каждому известно, что внешней отличительной чертой математики является то, что она представляется нам той «длинной цепью рассуждений», о которой говорил Декарт. Каждая математическая теория является цепочкой высказываний, которые выводятся друг из друга согласно правилам логики, во всем существенном совпадающей с логикой, известной со времен Аристотеля под названием «формальной логики», соответствующим образом приспособленной к специфическим потребностям математики. Таким образом, утверждение, что «дедуктивное рассуждение» является для математики объединяющим началом, — тривиальная истина. Но столь поверхностное замечание не может, конечно, служить объяснением единства различных математических теорий, точно так же, как нельзя, например, объединить в единой науке физику и биологию под предлогом, что и та, и другая использует экспериментальный метод. Способ рассуждения, заключающийся в построении цепочки силлогизмов, является только трансформирующим *механизмом*, который можно применять независимо от того, каковы посылки, к которым он применяется, и который, следовательно, не может характеризовать природу

¹⁾ L. Brunschvig, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, Arca, 1912.

²⁾ Л. Брюншви́г, цит. соч., стр. 447.

этих последних. Другими словами, это лишь внешняя *форма*, которую математик придает своей мысли, орудие, делающее ее способной объединяться с другими мыслями¹⁾, и, так сказать, язык, присущий математике, но не более того. Упорядочить словарь этого языка и уточнить его синтаксис — это значит сделать очень полезное дело, и эта работа и составляет действительно одну из сторон аксиоматического метода, а именно ту, которую следует назвать *логическим формализмом* (или, как еще говорят, «логистикой»). Но — и мы настаиваем на этом — *это только одна сторона* и при том наименее интересная.

То, что аксиоматика ставит перед собой в качестве основной цели — уразумение существа математики, именно этого не может дать логический формализм, взятый сам по себе. Точно так же, как экспериментальный метод исходит из априорной уверенности в постоянстве законов природы, аксиоматический метод берет за точку опоры убеждение в том, что если математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад, то она тем более не является более или менее хитрым искусством, состоящим из произвольных сближений, в котором господствует одна техническая ловкость. Там, где поверхностный наблюдатель видит лишь две или несколько теорий, совершенно отличных друг от друга по своему внешнему виду, и где вмешательство гениального математика приводит к обнаружению совершенно «неожиданной помощи»²⁾, которую одна из них может оказать другой, там аксиоматический метод учит нас искать глубокие причины этого открытия, находить общие идеи, скрывающиеся за деталями, присущими каждой из рассматриваемых теорий, извлекать эти идеи и подвергать их исследованию.

ПОНЯТИЕ «СТРУКТУРЫ»

Какую форму приобретает эта процедура? Именно здесь аксиоматика больше всего сближается с экспериментальным методом. Черпая из картезианского источника, она «разделяет трудности, чтобы лучше их разрешить». В доказательствах какой-либо теории она стремится *развединить* главные пружины фигурирующих там рассуждений; затем, беря каждое из соответствующих положений *изолированно* и возводя его в общий принцип, она выводит из них следствия; наконец, возвращаясь к изученной теории, она снова *комбинирует* предварительно выделенные составные элементы и изучает, как они взаимодействуют между собой. Конечно, нет ничего нового в этом классическом сочетании анализа и синтеза; вся оригинальность этого метода заключается в том, как его применяют.

¹⁾ Каждый математик, впрочем, знает, что доказательство не является «понятием» в подлинном смысле этого слова, если ограничиться лишь проверкой правильности выводов, которые его составляют, и не пытаться понять отчетливо идеи, которые привели к созданию этой цепочки выводов предпочтительно перед всякой другой.

²⁾ Л. Брюншви́г, цит. соч., стр. 446.

Чтобы проиллюстрировать примером только что описанную процедуру, мы рассмотрим наиболее старую (и наиболее простую) аксиоматическую теорию — теорию абстрактных групп. Рассмотрим следующие три операции: 1° *сложение действительных чисел*, при котором сумма двух действительных чисел (положительных, отрицательных и нуля) определена обычным образом; 2° *умножение целых чисел по простому модулю p* , причем элементами, которые мы рассматриваем, являются числа $1, 2, 3, \dots, p-1$, а произведением двух таких чисел является, по определению, остаток от деления на p их произведения в обычном смысле; 3° *«композицию» перемещений* в евклидовом трехмерном пространстве, причем результатом этой композиции (или произведением) двух перемещений T и S (взятых в данном порядке) мы будем считать, по определению, перемещение, полученное в результате выполнения сначала перемещения T , а затем S . В каждой из этих трех теорий двум элементам x и y , взятым в данном порядке, рассматриваемого множества (в первом случае множества всех действительных чисел, во втором — множества чисел $1, 2, 3, \dots, p-1$, в третьем — множества всех перемещений) ставится в соответствие (с помощью особой для каждого множества процедуры) третий однозначно определенный элемент того же множества, который мы условимся во всех трех случаях символически обозначать $x \tau y$ (это будет сумма, если x и y — действительные числа; их произведение по модулю p , если они — натуральные числа $\leq p-1$; результат их композиции, если они являются перемещениями). Если теперь рассмотреть свойства этой «операции» в каждой из трех теорий, то обнаружится замечательный параллелизм; внутри же каждой из этих теорий эти свойства зависят друг от друга, и анализ логических связей между ними приводит к выделению небольшого числа тех свойств, которые являются независимыми (т. е. таких, что ни одно из них не является логическим следствием остальных). Можно, например ¹⁾, взять три следующие свойства, которые мы выразим с помощью наших символических обозначений, но которые, конечно, легко перевести на язык каждой из них:

а) каковы бы ни были элементы x, y, z , $(x \tau y) \tau z = x \tau (y \tau z)$ (ассоциативность операции $x \tau y$);

б) существует элемент e такой, что для всякого элемента x $e \tau x = x \tau e = x$ (для сложения действительных чисел — число 0, для умножения по модулю p — число 1, для композиции перемещений — «тождественное перемещение», которое оставляет на своем месте каждую точку пространства);

с) для каждого элемента x существует элемент x' , такой, что $x \tau x' = x' \tau x = e$ (для сложения действительных чисел — противоположное число $-x$, для композиции перемещений — обратное перемещение, т. е. такое, которое каждую точку, перемещенную смещением x ,

¹⁾ Этот выбор не является единственно возможным, и известны различные системы аксиом, «эквивалентных» рассматриваемой, причем аксиомы каждой системы являются логическими следствиями аксиом любой другой системы.

возвращает в исходное положение; для умножения по модулю p существование x' следует из очень простого арифметического рассуждения¹⁾).

Тогда мы устанавливаем, что те свойства, которые при помощи общих обозначений возможно выразить одним и тем же образом в каждой из этих трех теорий, являются следствием трех предыдущих. Например, поставим перед собой цель доказать, что из $x \tau y = x \tau z$ следует $y = z$. Можно было бы это сделать в каждой из этих теорий, используя рассуждения, специфические для данной теории. Но можно избрать следующий образ действий, который применим ко всем трем случаям. Из соотношения $x \tau y = x \tau z$ мы выводим равенство $x' \tau (x \tau y) = x' \tau (x \tau z)$ (x' имеет смысл, определенный выше). Далее, применяя а), получим $(x' \tau x) \tau y = (x' \tau x) \tau z$. Используя с), запишем это соотношение в виде $e \tau y = e \tau z$, и, наконец, применяя б), получаем $y = z$, что и требовалось доказать. В этом рассуждении мы полностью абстрагировались от природы элементов x, y, z т. е. нам неважно было знать, являются ли они действительными числами, натуральными числами $\leq p-1$ или перемещениями. Единственная посылка, которой мы пользовались, заключалась в том, что операция $x \tau y$ над элементами x, y удовлетворяет свойствам а), б), с). Для того чтобы избежать скучных повторений, приходят, таким образом, к мысли, что удобно раз и навсегда вывести логические следствия из этих трех единственных свойств. Необходимо, конечно, для удобства речи принять общую терминологию. Говорят, что множество, на котором определена операция $x \tau y$, характеризуемая тремя свойствами а), б) и с), снабжено *структурой группы* (или, более коротко, является *группой*). Условия а), б), с) называются аксиомами группы²⁾, и вывести из них их следствия — значит построить *аксиоматическую теорию групп*.

Теперь можно объяснить, что надо понимать в общем случае под *математической структурой*. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множествам элементов, природа которых³⁾ не определена.

¹⁾ Заметим, что остатки от деления на p чисел $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ не могут быть все различными. Приравняв два из них друг другу, легко показать, что степень x^{k-l} ($k > l$) от x имеет остаток, равный 1. Если x' является остатком от деления x^{k-l-1} на p , то произведение xx' по модулю равно 1.

²⁾ Разумеется, этот смысл слова «аксиома» не имеет ничего общего с общепринятым смыслом выражения «очевидная истина».

³⁾ Мы становимся здесь на «наивную» точку зрения и не касаемся шекспировских вопросов, полуфилософских, полуматематических, возникших в связи с проблемой «природы» математических «объектов». Ограничимся замечанием, что первоначальный плюрализм в наших представлениях этих «объектов», мыслимых сначала как идеализированные «абстракции» чувственного опыта и сохраняющих всю разнородность этих последних, аксиоматические исследования XIX—XX в. понемногу заменили унитарной концепцией, сводя последовательно все математические понятия сначала к понятию целого числа, затем на втором этапе к понятию *множества*. Это последнее, рассматриваемое долгое время как «первоначальное» и «неопределимое», было объектом многочисленных споров, вызван-

Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы¹⁾ (в случае групп — это отношение $x \tau y = z$ между тремя произвольными элементами); затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям (которые перечисляют и которые являются *аксиомами* рассматриваемой структуры)²⁾. Построить аксиоматическую теорию данной структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, *отказавшись от каких-либо других предположений* относительно рассматриваемых элементов (в частности от всяких гипотез относительно их «природы»).

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ СТРУКТУР

Отношения, являющиеся исходной точкой в определении структуры, могут быть по своей природе весьма разнообразными. То отношение, которое фигурирует в групповых структурах, называют «законом композиции»; это такое отношение между тремя элементами, которое определяет однозначно третий элемент как функцию двух первых. Когда отношения в определении структуры являются «законами композиции», соответствующая структура называется *алгебраической структурой* (например, структура *поля* определяется двумя законами композиции с надлежащим образом выбранными аксиомами: сложение и умножение действительных чисел определяют структуру поля на множестве этих чисел).

Другой важный тип представляют собой структуры, определенные отношением *порядка*; на этот раз это — отношение между двумя элементами x, y , которое чаще всего мы выражаем словами « x меньше

ных характером его исключительной общности и весьма туманной природой представлений, которые оно у нас вызывает. Трудности исчезли только тогда, когда исчезло само понятие множества (и с ним все метафизические псевдопроблемы относительно математических «объектов») в результате недавних исследований о логическом формализме. С точки зрения этой концепции единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры. Читатель найдет более подробное развитие этой точки зрения в следующих двух статьях: J. Dieudonné, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques*, Revue Scientifique 78 (1939), стр. 224—232; H. Cartan, *Sur le fondement logique des mathématiques*, Revue Scientifique 81 (1943), стр. 3—11.

¹⁾ В действительности, это определение структуры не является настолько общим, насколько этого требуют нужды математики. Нужно также охватить и тот случай, когда отношения, определяющие структуру, имеют место не между *элементами* рассматриваемого множества, а между *подмножествами* этого множества, и даже, в более общем случае, между элементами множеств еще более высокой «степени», — в так называемой «лестнице типов». Дальнейшие детали читатель найдет в наших *Eléments de Mathématique*, книга I (сводка результатов), Actual. Scient. et Industr., n° 846.

²⁾ В случае групп надо было бы, если соблюдать полную строгость, считать аксиомой, кроме а), б), с), и утверждение о том, что соотношение $z = x \tau y$ определяет одно и только одно z , когда даны x, y . Обычно считают, что это свойство молчаливо подразумевается самой записью этого отношения.

или равно y » и которое мы будем обозначать в общем случае $x R y$. Здесь больше не предполагается, что это отношение однозначно определяет один из элементов x, y как функцию другого. Аксиомы, которым оно подчиняется, таковы: а) для всех x $x R x$; в) из соотношений $x R y, y R x$ следует $x = y$; с) из соотношений $x R y, y R z$ следует $x R z$. Очевидным примером множества, снабженного такой структурой, является множество целых чисел (или множество действительных чисел), причем здесь знак R заменяется на \leq . Но надо заметить, что мы не включили в число аксиом аксиому, отражающую следующее свойство, которое кажется неотделимым от того понятия порядка, каким мы пользуемся в обыденной жизни: «каковы бы ни были x, y , имеет место или $x R y$ или $y R x$ ». Другими словами, не исключается случай, когда два элемента могут оказаться *несравнимыми*. На первый взгляд это может показаться странным, но легко привести очень важные примеры структур порядка, для которых имеет место именно это обстоятельство. Именно с таким положением вещей мы сталкиваемся, когда X, Y означают подмножества некоторого множества, а $X R Y$ означает « X содержится в Y » или еще когда x, y являются натуральными числами, а $x R y$ означает « x делит y », или, наконец, когда $f(x)$ или $g(x)$ являются действительными функциями, определенными на интервале $a \leq x \leq b$, а $f(x) R g(y)$ означает: «каково бы ни было $x, f(x) \leq g(x)$ ». Эти примеры в то же время показывают, сколь велико разнообразие областей, где появляются структуры порядка, и заранее дают представление о том, насколько интересно их изучение.

Мы скажем еще несколько слов о третьем важном типе структур — *топологических структурах* (или *топологиях*); в них находят абстрактную математическую формулировку интуитивные понятия *окрестности, предела* и *непрерывности*, к которым нас приводит наше представление о пространстве. Усилия, необходимые для перехода к абстракции, находящей свое выражение в аксиомах такой структуры, требуются значительно большие по сравнению с тем, что имело место в предыдущих примерах, и размеры настоящей статьи вынуждают нас отослать читателей, желающих получить более подробные сведения по этому вопросу, к специальной литературе ¹⁾.

СТАНДАРТИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОРУДИЙ

Мы думаем, что нами сказано достаточно для того, чтобы читатель мог создать себе достаточно ясное представление об аксиоматическом методе. Наиболее бросающейся в глаза его чертой, как это видно из изложенного выше, является реализация значительной *экономии мысли*. «Структуры» являются *орудиями* математика; каждый

¹⁾ См., например, наши *Eléments* книга III, введение к главе 1, Actual. Scient. et Industr., n°. 858. (Русский перевод: Н. Бурбаки, Топологические структуры, М., 1959. — *Ред.*)

раз, когда он замечает, что между элементами, изучаемыми им, имеют место отношения, удовлетворяющие аксиомам структуры определенного типа, он сразу может воспользоваться всем арсеналом общих теорем, относящихся к структурам этого типа, тогда как раньше он был бы должен мучительно трудиться, выковыывая сам средства, необходимые для того, чтобы штурмовать рассматриваемую проблему, причем их мощность зависела бы от его личного таланта и они были бы отягчены часто излишне стеснительными предположениями, обусловленными особенностями изучаемой проблемы. Таким образом, можно было бы сказать, что аксиоматический метод является не чем иным, как «системой Тейлора» в математике¹⁾.

Но это сравнение — недостаточное. Математик не работает подобно машине; мы должны особенно подчеркнуть, что в рассуждениях математика основную роль играет особая *интуиция*²⁾, отличная от обмуденной чувственной интуиции и заключающаяся скорее в непосредственном угадывании (предшествующем всякому рассуждению) нормального положения вещей, которое, как кажется, он вправе ожидать от математических объектов, ставших в результате его частого оперирования с ними столь же для него привычными, как и объекты реального мира. Но ведь каждая структура сохраняет в своем языке интуитивные отзвуки той специфической теории, откуда ее извлек аксиоматический анализ, описанный нами выше. И когда исследователь неожиданно открывает эту структуру в изученных им явлениях, это для него является как бы толчком, который сразу направляет интуитивный поток его мыслей в неожиданном направлении, и в результате этого математический ландшафт, по которому он движется, получает новое освещение. Чтобы ограничиться старым примером, вспомним прогресс, осуществленный в начале XIX в. благодаря геометрической интерпретации мнимых величин; с нашей точки зрения, это было обнаружение в множестве комплексных чисел хорошо известной топологической структуры — структуры евклидовой плоскости — со всеми следующими отсюда возможностями приложений, — открытие, которое в руках Гаусса, Абеля, Коши и Римана менее чем за одно столетие обновило весь анализ.

Такие примеры умножились за последние 50 лет: пространство Гильберта и более общие функциональные пространства, вводящие топологические структуры в множества, элементами которых являются уже не точки, а *функции*; p -адические числа Гензеля, посредством которых — еще более удивительное обстоятельство! — топология воцарилась в той области, которая до этих пор считалась царством дискретного, разрывного по преимуществу — в множестве целых чисел;

¹⁾ Система Тейлора — капиталистическая система организации труда, предложенная американским инженером Ф. У. Тейлором для получения максимальной прибыли. Одним из элементов этой системы является изучение трудовых процессов путем их разложения на составные элементы. (Прим. ред.)

²⁾ Интуицией, которая, впрочем, часто ошибается (как и всякая интуиция).

мера Хаара, безгранично расширявшая область применения понятия интеграла и способствовавшая весьма глубокому анализу свойств непрерывных групп, — таковы решающие моменты в прогрессе математики, те повороты, когда свет гения определял новое направление, теории, обнаруживая в ней структуру, которая, как казалось а priori, не играла там никакой роли.

Это говорит о том, что в настоящее время математика менее, чем когда-либо, сводится к чисто механической игре с изолированными формулами, более чем когда-либо интуиция безраздельно господствует в генезисе открытий; но теперь и в дальнейшем в ее распоряжении находятся могущественные рычаги, предоставленные ей теорией наиболее важных структур, и она окидывает единым взглядом огромные области, унифицированные аксиоматикой, в которых некогда, как казалось, царил самый бесформенный хаос.

ОБЗОР В ЦЕЛОМ

Руководствуясь концепцией аксиоматики, попытаемся представить теперь математический мир в целом. Конечно, мы более не распознаем здесь традиционный порядок, который, подобно первым классификациям видов животных, ограничивался тем, что расставлял рядом друг с другом теории, представляющие наибольшее внешнее сходство. Вместо точно разграниченных разделов алгебры, анализа, теории чисел и геометрии мы увидим, например, теорию простых чисел по соседству с теорией алгебраических кривых или евклидову геометрию рядом с интегральными уравнениями, и упорядочивающим принципом будет концепция *иерархии структур*, идущей от простого к сложному, от общего к частному.

В центре находятся основные типы структур, из которых мы только что перечислили главнейшие, так сказать, *порождающие структуры* (les structures — mères). В каждом из этих типов господствует уже достаточное разнообразие, так как там надо различать наиболее общую структуру рассматриваемого типа с наименьшим числом аксиом и структуры, которые получаются из нее в результате ее обогащения дополнительными аксиомами, каждая из которых влечет за собой и новые следствия. Именно таким образом теория групп, помимо тех общих положений, которые справедливы для всех групп и зависят только от аксиом, перечисленных выше, содержит, в частности, теорию *конечных* групп (в которой добавляют аксиому, гласящую, что число элементов группы конечно), теорию *абелевых* групп (в которых имеем $x \tau y = y \tau x$, каковы бы ни были x, y), а также теорию *конечных абелевых групп* (в которой предполагаются выполненными обе вышеуказанные аксиомы). Точно так же среди *упорядоченных* множеств различают те, в которых (как при упорядоченности в множестве целых или в множестве действительных чисел) любые два элемента сравнимы и которые называются *линейно упорядочен-*

ными (*totalement ordonnée*); среди этих последних особо изучают множества, называемые *вполне упорядоченными* (в которых, так же как в множестве натуральных чисел, каждое подмножество имеет «наименьший элемент»). Подобная же градация существует и для топологических структур.

За пределами этого первоначального ядра появляются структуры, которые можно было бы назвать *сложными* (*multiples*) и в которые входят одновременно одна или несколько порождающих структур, но не просто совмещенные друг с другом (что не дало бы ничего нового), а органически *скомбинированные* при помощи одной или нескольких связывающих их аксиом. Именно такой характер носит *топологическая алгебра*, изучающая структуры, определяемые одним или несколькими законами композиций и одной топологией, которые связаны тем условием, что алгебраические операции являются *непрерывными* функциями (для рассматриваемой топологии) элементов, над которыми они производятся. Не менее важной является *алгебраическая топология*, которая рассматривает некоторые множества точек пространства, определенные топологическими свойствами (симплексы, циклы и т. д.) как элементы, над которыми производятся алгебраические операции. Соединение структуры порядка и алгебраической структуры точно так же изобилует результатами, приводя, с одной стороны, к теории делимости идеалов, а с другой стороны — к теории интегрирования и к «спектральной теории» операторов, где точно так же топология играет свою роль.

Наконец, далее начинаются собственно частные теории, в которых элементы рассматриваемых множеств, которые до сего момента в общих структурах были совершенно неопределенными, получают более определенную индивидуальность. Именно таким образом получают теории классической математики: анализ функций действительного и комплексного переменного, дифференциальную геометрию, алгебраическую геометрию, теорию чисел. Но они теряют свою былую автономность и являются теперь перекрестками, на которых сталкиваются и взаимодействуют многочисленные математические структуры, имеющие более общий характер.

Чтобы сохранить правильную перспективу, необходимо после этого беглого обзора сейчас же добавить, что он должен рассматриваться как весьма грубое приближение к истинному положению дел в математике. Он является одновременно *схематическим*, *идеализированным* и *застывшим*.

Схематическим — так как в деталях не всё идет так гладко и планомерно, как это может представиться после того, что мы рассказали. Между прочим, имеются неожиданные возвращения назад, когда теория, носящая ярко выраженный частный характер, как, например, теория действительных чисел, оказывает помощь, без которой нельзя обойтись при построении какой-либо общей теории, как, например, топологии или теории интегрирования.

Идеализированным — потому что далеко не во всех разделах математики некоторая определенная часть каждой из основных структур распознана и вложена в четко очерченные границы. В некоторых теориях (например, в теории чисел) существуют многочисленные изолированные результаты, которые до сего времени не умеют ни классифицировать, ни связать удовлетворительным образом с известными структурами.

Наконец — застывшим, так как нет ничего более чуждого аксиоматическому методу, чем статическая концепция науки, и мы не хотели оставить у читателя впечатление, будто бы мы претендовали дать очерк ее окончательного состояния. Структуры не остаются неизменными ни по их числу, ни по их сущности; вполне возможно, что дальнейшее развитие математики приведет к увеличению числа фундаментальных структур; открыв плодотворность введения новых аксиом или новых сочетаний аксиом, можно заранее оценить значение этих открытий, если судить о них по тем, которые дали уже известные структуры. С другой стороны, эти последние ни в коем случае не являются чем-то законченным, и было бы весьма удивительно, если бы их жизненная сила была уже исчерпана.

Вводя эти неизбежные поправки, можно лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическим образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз всё более и более ясному плану и стремясь к всё более и более величественному расположению, когда сносятся старые кварталы с их лабиринтом переулков для того, чтобы проложить к периферии улицы всё более прямые, всё более широкие, всё более удобные.

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ПРОШЛОМУ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Концепция, которую мы только что пытались изложить, возникла не сразу, а лишь в результате более чем полувековой эволюции и была встречена не без сопротивления как со стороны философов, так и со стороны математиков. Многие из этих последних долго не могли согласиться рассматривать аксиоматику как что-либо большее, чем ненужные тонкости логиков, неспособные оплодотворить какую-либо теорию. Эта критика объясняется, без сомнения, исторической случайностью: аксиоматизации, которые появились первыми и которые имели наибольший отклик (аксиоматизации арифметики Дедекинда и Пеано, евклидовой геометрии Гильберта), касались *универсальных* теорий, т. е. таких, которые полностью определялись совокупностью своих аксиом, причем система этих аксиом не могла быть применена к какой-либо другой теории, кроме той, из которой она была извлечена (в противоположность тому, что мы видели, например, в теории

групп). Если бы это имело место для всех структур, то упрек в бесплодности, выдвинутый по адресу аксиоматического метода, был бы полностью оправдан¹⁾. Но этот последний доказал свою мощь своим собственным развитием, и отвращение к нему, которое еще встречается там и сям, можно объяснить лишь, что разум по естественной причине затрудняется допустить мысль, что в конкретной задаче может оказаться плодотворной форма интуиции, отличная от той, которая непосредственно подсказывается данными (и которая возникает в связи с абстракцией более высокого порядка и более трудной).

Что касается возражений со стороны философов, то они относятся к области, где мы не решаемся всерьез выступать из-за отсутствия компетентности; основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического²⁾. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь,—это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл) и, быть может, мы их никогда и не узнаем. Во всяком случае сделанное замечание могло бы побудить философов в будущем быть более благоразумными при решении этого вопроса. Перед тем как началось революционное развитие современной физики, было потрачено немало труда из-за желания во что бы то ни стало заставить математику рождаться из экспериментальных истин; но, с одной стороны, квантовая физика показала, что эта «макроскопическая» интуиция действительности скрывает «микроскопические» явления совсем другой природы, причем для их изучения требуются такие разделы математики, которые, наверное, не были изобретены с целью приложений к экспериментальным наукам, а с другой стороны, аксиоматический метод показал, что «истины», из которых хотели сделать средоточие математики, являются лишь весьма частным аспектом общих концепций, которые отнюдь не ограничивают свое применение этим частным случаем. В конце концов, это интимное взаимопроникновение, гармонической необходимостью

¹⁾ Мы были свидетелями также, особенно в то время, когда аксиоматический метод только что начал развиваться, расцвета уродливых структур, полностью лишенных приложений, единственное достоинство которых заключалось в том, что, изучая их, можно было дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют. Очевидно, в тот период можно было поддаться искушению и сделать вывод, что это — единственные результаты, которые следует ожидать от этого метода.

²⁾ Мы не касаемся здесь возражений, вызванных применением правил формальной логики к рассуждениям в аксиоматических теориях; они связаны с логическими трудностями, на которые наталкивается теория множеств. Заметим только, что эти трудности могут быть преодолены таким образом, что не останется никакой неуверенности или сомнения относительно правильности рассуждений. По поводу этого можно обратиться к статьям Картана и Дьедонне, которые были цитированы выше.

которого мы только что восхищались, представляется не более чем случайным контактом наук, связи между которыми являются гораздо более скрытыми, чем это казалось а priori.

В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм. Конечно, нельзя отрицать, что большинство этих форм имело при своем возникновении вполне определенное интуитивное содержание; но как раз сознательно лишая их этого содержания, им сумели придать всю их действенность, которая и составляет их силу, и сделали для них возможным приобрести новые интерпретации и полностью выполнить свою роль в обработке данных.

Только имея в виду этот смысл слова «форма», можно говорить о том, что аксиоматический метод является «формализмом». Единство, которое он доставляет математике, это — не каркас формальной логики, не единство, которое дает скелет, лишенный жизни. Это — питательный сок организма в полном развитии, податливый и плодотворный инструмент исследования, который сознательно используют в своей работе, начиная с Гаусса, все великие мыслители-математики, все те, кто, следуя формуле Лежен-Дирихле, всегда стремились «идеи замечать вычислениями».

Перевод с французского Д. Н. Ленского

О ФУНДАМЕНТЕ И СТИЛЕ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

(ПО ПОВОДУ СТАТЬИ Н. БУРБАКИ)

А. А. Ляпунов

(Москва)

Огромный поток современной научной литературы в области математики посвящен решению конкретных математических задач и разработке общих математических теорий. Именно в этом заключается основная ценность современной математической науки. Однако громадная разветвленность проблематики и непрерывно возрастающее число людей, принимающих участие в ее активной разработке, приводят к тому, что ориентироваться в современной научной литературе становится всё труднее и труднее.

В связи с этим тенденции к *систематизации всей современной математики* должны быть признаны очень актуальными.

Наиболее ярким коллективным произведением в этом направлении является многотомное издание «Элементы математики», выпускаемое очень сильным коллективом французских математиков под псевдонимом «Н. Бурбаки». Некоторые выпуски этого издания уже переведены на русский язык. Было бы весьма целесообразно издать это произведение по-русски полностью. Отметим, что количество работ в самых различных областях математики, примыкающих к этому труду, неуклонно возрастает.

Статья Н. Бурбаки «Архитектура математики» представляет собой высказывания программного характера. В ней авторы излагают тот взгляд на современную математику, который проводится во всей полноте в их сочинении. Благодаря этому статья представляет интерес для широкого круга читателей, интересующихся математикой.

Существенной особенностью коллектива Бурбаки является то, что в него входят очень сильные, творчески работающие математики, благодаря чему тенденция к систематизации гармонически сочетается со стремлением к отысканию новых значительных направлений в математике и к разработке новых математических теорий. Можно сказать, не боясь преувеличений, что Бурбаки представляют собой наиболее значительное явление в современной математике. Деятельность этого коллектива принесла чрезвычайно существенные плоды в таких разнообразных областях математики, как топология, топологическая алгебра,

алгебраическая геометрия, теория функций многих комплексных переменных, теория алгебраических чисел, функциональный анализ. Наконец, та система математики, которую разрабатывают Бурбаки и их приверженцы, находит всё большее число сторонников среди математиков всего мира и оказывает всё большее влияние на современную науку.

Именно потому, что я очень высоко расцениваю деятельность Бурбаки, мне кажется досадной некоторая нечеткость общефилософских воззрений, высказанных в заключительной части статьи «Архитектура математики». Авторы с большой убедительностью показывают, что аксиоматический метод изучения основных математических структур является весьма прогрессивным. Он содействует вскрытию внутреннего родства внешне далеких математических теорий, позволяет расширять границы применимости математических методов, позволяет освобождаться от несущественных ограничений в общих теориях и содействует развитию новой плодотворной математической интуиции. Можно к этому прибавить, что именно аксиоматический метод служит основой самых широких приложений математики к разнообразнейшим сторонам человеческой деятельности. Наблюдающаяся в наше время экспансия математической мысли приводит к необходимости опираться на аксиоматический метод при решении задач, возникающих на почве автоматизации управления производством, использования вычислительных машин как подсобного средства умственного труда, в математической лингвистике, математической экономике и математической биологии. Далеко не всё, что в этих областях делается, строится в явной форме на базе аксиоматического метода. Иногда аксиоматизация проводится нечетко, так что наряду с формализацией новых элементов теории происходит содержательное использование ее старых разделов. Однако такая неполнота использования аксиоматического метода рано или поздно приводит к неувязкам, противоречиям и к потере полноты результатов, которые устраняются только приведением в систему логической основы этих теорий, т. е. их последовательным аксиоматическим перестроением. Пренебрежение к разработке логической основы новых теорий часто приводит к кустарничеству. Таким образом, я считаю, что широкое применение аксиоматических методов необходимо прежде всего для *прикладной математики*. Это обстоятельство должно учитываться с максимальной полнотой при составлении учебных планов инженерных и математических учебных заведений. Мне кажется, что Бурбаки обращают недостаточное внимание на прикладное значение аксиоматических концепций.

С этим связано и то, что взаимоотношения между математическими и общезначимыми теориями, в частности возможность применения аксиоматических теорий для понимания связи между физическими явлениями, представляется авторам случайным и приводящим обстоятельством. На самом деле единство материального мира обуславливает то, что при самых различных обстоятельствах возникают однотипные

связи между различными сторонами проявлений его особенностей. Эти проявления являются источником физических представлений, которые в свою очередь являются источником математических теорий. Близость тех структур, которые изучаются в этих теориях, является своеобразным отражением единства материального мира в математической абстракции. Правда, выяснение этих обстоятельств выходит за рамки того внутриматематического рассмотрения гносеологических вопросов математики, которому посвящена статья Н. Бурбаки. Но я не вижу оснований для того, чтобы рассматривать этот вопрос, непременно соблюдая указанные ограничения.

Во всем остальном, мне кажется, точка зрения авторов вполне правомочна и высказанные ими взгляды убедительны.

Если аксиоматический метод является стилем современной математики, то потребности практики (понятые в самом широком смысле, включая сюда также и потребности смежных наук) являются ее фундаментом. Широкое использование абстрактных концепций математики: навыки в выработке точных понятий, отчетливая формулировка задач и применение аксиоматического метода при решении актуальных задач, возникающих из практики, — вот что должно быть признано особенно характерным для современной математики. В этой связи нельзя забывать о том, что всестороннее совершенствование и оттачивание математического аппарата, а также систематизация всех добытых ценностей должны быть неотъемлемой составной частью этой деятельности.

ЮНОШЕСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Эта новая форма работы со школьниками родилась в г. Иванове. Уже давно по всей стране вошли в традицию организуемые вузами школьные математические кружки, лекции для школьников и математические олимпиады. Они преследовали, в основном, цель — заинтересовать учащихся новым, не входящим в школьную программу материалом или дать иное освещение известного им материала.

Работники Ивановского пединститута впервые организовали **вечерние математические школы** (наподобие музыкальных и художественных — в Иванове такие школы первоначально и называли «**студиями**»), в которых школьники, интересующиеся математикой, смогли бы получить систематические дополнительные знания.

Эта идея нашла поддержку и в других городах. В Москве она увлекла работников и студентов университета; к ним присоединились и другие вузы (МГПИ им. Ленина, Физ.-технич. институт). Уже в текущем учебном году открыто около десяти «Юношеских математических школ», как их называют в Москве; эти школы работают два раза в неделю по вечерам, каждое занятие длится два часа. Такие же школы имеются в Воронеже (ее организовал Воронежский университет), Орехово-Зуеве (Ореховский пединститут), Ярославле (Ярославский пединститут) и других городах.

В юношеских математических школах могут учиться все успевающие ученики старших (IX—XI) классов, проявляющих специальный интерес к математике. Эти школы, наряду с кружками, являются одной из форм самообразовательной работы; но, в отличие от кружков, здесь требуется систематическое посещение занятий и выполнение домашних заданий.

Программы юношеских математических школ еще окончательно не оформились; естественно думать, что они будут зависеть от профиля института, организующего школу. Эти программы должны содержать как вопросы элементарной математики, расширяющие и дополняющие школьный курс, так и некоторые вопросы высшей математики. Следует подумать о включении в программу вопросов, характерных для современного развития математики (например — элементов математической логики, теории математических машин), а также — основ теории вероятностей.

Редакция предполагает, по мере накопления опыта работы математических школ, освещать его на страницах «Математического просвещения».

К ВОПРОСУ О РЕФОРМЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

От редакции

В предыдущем выпуске «Математического просвещения» был помещен цикл материалов «К вопросу о реформе преподавания математики в средней школе», содержащий статьи и проект школьной программы математики, составленные отдельными научными работниками. Эти материалы были подготовлены к печати еще до принятия «Закона об укреплении и связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР». Продолжая этот цикл, редакция печатает в порядке обсуждения новый проект программ для преобразованной средней школы — программу для неполной средней школы (восьмилетки) и программу для общеобразовательной трехлетней средней школы (IX, X и XI классы) без отрыва от производства. Этот проект разработан, в основном, коллективом сектора математики Института методов обучения Академии педагогических наук РСФСР и с некоторыми изменениями предложен Министерством просвещения РСФСР для широкого обсуждения.

Здесь помещены: учебные планы по математике и тексты обеих программ, за исключением программы по арифметике¹⁾, с некоторой редакционной перепланировкой: текст программ распределен по классам и напечатан в два столбца, как это было сделано в проекте программы, напечатанном в предыдущем выпуске.

Далее печатается в порядке обсуждения статья В. Г. Ашкинзуе, В. И. Левина и А. Д. Семушина «Некоторые замечания к проекту программы по математике для средней школы».

¹⁾ Полностью программа напечатана в журнале «Математика в школе», 1959, № 4, стр. 1—14; основные ее положения обосновываются в статье В. Г. Ашкинзуе, В. И. Левина и А. Д. Семушина «О перестройке программ по математике в свете новых задач средней школы» «Математика в школе», 1959, № 1, стр. 40—51).

**ПРОЕКТ ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ,**
предлагаемый Министерством просвещения РСФСР
для широкого обсуждения

Учебный план ¹⁾

А) Неполная средняя школа

Классы Предметы	V		VI		VII		VIII	
	17/19 недель		17/19 недель		17/19 недель		17/18 недель	
	Число часов							
	в нед.	всего	в нед.	всего	в нед.	всего	в нед.	всего
Арифметика 284 часа	6	216	4,0	68	—	—	—	—
Алгебра 307 часов	—	—	0,4	76	4	144	3/2	87
Геометрия 232 часа	—	—	2	72	2	72	2/3	88

Б) Трехлетняя средняя школа (городская)

Классы Предметы	IX		X		XI	
	17/22 недель		17/22 недель		17/18 недель	
	Число часов					
	в нед.	всего	в нед.	всего	в нед.	всего
Алгебра и элементарные функции 244 часа	3/2	96	2	78	2	70
Геометрия 208 часов	1/2	60	2	78	2	70

¹⁾ Числа в числителе относятся к первому полугодью, в знаменателе — ко второму.

ПРОГРАММА ДЛЯ НЕПОЛНОЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ
(ВОСЬМИЛЕТНЕЙ)

VI класс

Алгебра

1) Алгебраические выражения. Уравнения (20 ч.) Употребление букв для обозначения чисел. Составление формул решения задач. Алгебраические выражения. Коэффициент. Степень (с натуральным показателем) ¹⁾. — Порядок действий и употребление скобок. Числовые значения алгебраического выражения. Составление таблиц числовых значений алгебраических выражений. — Буквенная запись законов и свойств арифметических действий и зависимостей между данными действиями и их результатами. — Понятие об уравнении. Решение уравнений первой степени на основании зависимости между данными действиями и их результатами. — Решение задач с помощью составления уравнения.

2) Положительные и отрицательные числа (20 ч.). Положительные и отрицательные числа, число нуль (рациональные числа). Числовая ось. Абсолютное значение числа. Сравнение чисел по величине, понятие числового неравенства. Сложение, вычитание, умножение и деление чисел. Распространение законов арифметических действий на рациональные числа. Решение уравнений первой степени в области рациональных чисел. — Основные свойства числовых неравенств. Почленное сложение и вычитание числовых неравенств.

3. Действия над целыми алгебраическими выражения

¹⁾ Здесь и дальше знак «тире» в программе отделяет один круг вопросов от другого.

Геометрия

1) Основные понятия (16 ч.) Предмет геометрии. Геометрическое тело, поверхность, линия, прямая, луч, точка, плоскость. — Отрезок, свойства прямой и отрезка. Сравнение отрезков. Действия над отрезками: сложение, вычитание, умножение на целое число. Приближенное деление отрезков на равные части. — Измерение отрезков. Измерение расстояний на местности. — Угол. Развернутый и полный угол. Сравнение углов. Действия над углами (при помощи малки): сложение, вычитание, умножение на целое число. Биссектриса угла. — Углы: прямой, острый, тупой. Перпендикуляр к прямой. Построение прямого угла с помощью чертежного треугольника. Эккер. Построение прямого угла на местности. — Смежные и вертикальные углы; их свойства. — Окружность, дуга, центр окружности, радиус, хорда, диаметр. — Центральный угол. Соотношение между центральными углами и дугами. — Градусное измерение дуг и углов. Транспортир. Измерение и построение углов с помощью транспортира. Приближенное деление угла на равные части. Астролябия. Измерение углов на местности, глазомерная оценка величины угла.

2) Параллельность (18 ч.). Определение параллельности прямых. Три признака параллельности прямых: прямые параллельны, если соответственные углы равны (без доказательства); прямые параллельны, если внутренне накрест лежащие углы равны; прямые параллельны, если сумма внутренних односторонних углов равна 180° . Построение параллельных прямых с помощью чертежного треугольника и линейки. Свойства углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых секущей. — Свойства углов, образованных: а) соответственно параллельными сторонами и б) соответственно перпендикулярными сторонами. Эклиметр.

ми (36 ч.). Одночлен и многочлен. Многочлен как сумма. Приведение подобных членов. Сложение, вычитание и умножение одночленов и многочленов. — Возведение одночлена в целую положительную степень. Формулы умножения: $(a \pm b)^2$; $(a + b)(a - b)$; $(a \pm b)^3$; $(a \mp b)(a^2 + ab + b^2)$. — Использование правил действий над одночленами и многочленами при решении уравнений первой степени с одним неизвестным.

3) Треугольники (38 ч.). Понятие о многоугольнике. Треугольник и его элементы. Классификация треугольников по соотношению между сторонами одного и того же треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты треугольника. — Сумма внутренних углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника. Классификация треугольников по величине углов. Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника. — Свойства равнобедренного треугольника. Осевая симметрия. Соотношение между сторонами и углами в треугольнике. — Аксиома и теорема. Прямая и обратная теоремы. — Понятие о равенстве фигур. Признаки равенств треугольников. — Проекция точки и отрезка на прямую. Свойство перпендикуляра и наклонных. Расстояние точки от прямой. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойство катета, лежащего против угла в 30° . — Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку через его середину. Свойство биссектрисы угла. — Основные задачи на построение: а) построение точки, отрезка и треугольника, симметричных по отношению к данной оси; б) деление отрезка и угла на две равные части; в) построение угла, равного данному; г) построение перпендикуляра к данной прямой через точку, данную на прямой и вне ее; д) построение прямой, параллельной данной прямой; е) построение треугольника по его основным элементам.

Практические работы на местности. Проведение параллельных прямых на местности. Определение недоступных расстояний на основании свойств осевой симметрии и при помощи построения треугольников. Съемка плана несложного участка (четыреугольного или пятиугольного) методом разложения на треугольники.

VII класс

Алгебра

1) Уравнение первой степени с одним неизвестным с числовыми коэффициентами (28 ч.). Понятие о тождестве и уравнении. Корни уравнений. Понятие

Геометрия

1) Четырехугольники (24 ч.). Параллелограмм; его свойства. Признаки параллелограмма. Центральная симметрия параллелограмма. Прямо-

о равносильности уравнений. Основные свойства уравнений (на примерах).— Решение уравнений первой степени с одним неизвестным с числовыми коэффициентами. Решение задач при помощи составления уравнений.

2) Разложение многочленов на множители (44 ч.). Деление одночленов и многочленов на одночлен. Деление многочленов с использованием формул умножения (простейшие случаи).— Разложение многочленов на множители способом вынесения общего множителя за скобки, способом группировки и по формулам умножения.— Понятие о квадратном корне из положительного числа; ознакомление с таблицами квадратных корней.— Разложение квадратного трехчлена на множители посредством выделения полного квадрата.— Примеры решения уравнений второй степени посредством разложения левой части на множители.

3) Алгебраические дроби (40 ч.). Алгебраическая дробь. Основное свойство дроби. Сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю. Сложение, вычитание, умножение и деление дробей с одночленными и многочленными числителями и знаменателями.— Решение уравнений с числовыми коэффициентами, содержащих неизвестное в знаменателе. Примеры решения уравнений первой степени с буквенными коэффициентами. Решение задач при помощи составления уравнений первой степени.

4) Система координат и простейшие графики (12 ч.). Оси координат. Абсцисса и ордината точки на плоскости. Построение точки по ее координатам; обратная задача. Построение графиков зависимостей:

$$y = ax, y = ax + b, y = \frac{a}{x}.$$

5) Уравнения с двумя неизвестными. Системы уравнений (20 ч.). Одно уравнение с двумя неизвестными, его геометрическое представление. График уравнения: $ax + by + c = 0$.— Система уравнений первой степени с двумя неизвестными. Решения системы. Основные свойства, на которых основано решение систем (на примерах). Решение систем двух линейных уравнений с числовыми коэффициентами (способом подстановки и

угольника, ромб, квадрат, их основные свойства.— Свойство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла. Средняя линия треугольника и ее свойства. Точка пересечения медиан.— Трапеция. Средняя линия трапеции.— Построение четырехугольников.

2) Площадь многоугольника. Объем призмы (16 ч.). Понятие об измерении площади.— Площадь прямоугольника. Теорема Пифагора. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции, произвольного многоугольника.— Прямая призма. Развертка прямой четырехугольной и треугольной призмы. Вычисление площади поверхности прямой четырехугольной и треугольной призмы.— Понятие о вычислении объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, прямой четырехугольной и треугольной призмы (без доказательства).

Практические работы. Вычисление площади земельных участков. Вычисление поверхностей и объемов геометрических моделей и простейших деталей, с которыми учащиеся встречаются в школьной мастерской.

3) Окружность (32 ч.). Построение окружности по трем данным точкам (окружность, описанная около треугольника).— Зависимость между хордами и дугами в круге. Свойство диаметра, перпендикулярного к хорде; обратные теоремы. Свойство дуг, заключенных между параллельными хордами.— Взаимное положение прямой и окружности. Прямая и обратная теоремы о касательной к окружности. Построение касательной к окружности, к двум окружностям (с помощью одной линейки).— Взаимное положение двух окружностей (без доказательства).— Вписанные углы; их измерение.— Длина окружности и площадь круга (без

способом сложения). Геометрическое истолкование решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными: 1) одно решение; 2) бесконечное множество решений; 3) отсутствие решений (пересечение, совпадение и параллельность прямых, соответствующих уравнениям системы).— Решение целых задач с помощью составления системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

доказательства).— Цилиндр; его развертка; поверхность и объем цилиндра (без доказательства).

Практические работы. Вычисление поверхностей и объемов геометрических тел по данным, полученным путем непосредственного измерения необходимых для этого величин.

VIII класс

Алгебра

1) Счетная (логарифмическая) линейка (8 ч.). Основная шкала счетной линейки. Умножение и деление чисел при помощи линейки.

2) Квадратные и кубические корни (20 ч.). Построение графиков зависимости $y = ax^2$ и $y = x^3$. Вычисление квадратов и кубов чисел по графикам, таблицам и при помощи счетной линейки.— Квадратный корень и его арифметическое значение. Приближенный квадратный корень из положительного числа.— Теорема: «Не существует рационального числа, квадрат, которого равен 2». Понятие об иррациональном числе.— График зависимости $y = \sqrt{x}$. Извлечение квадратного корня из положительного числа по графику, по таблицам и при помощи счетной линейки.— Понятие о кубическом корне. График зависимости $y = \sqrt[3]{x}$. Извлечение кубического корня по графику, таблицам и при помощи счетной линейки.— Квадратный и кубический корень из произведения, дроби и степени. Вынесение множителя из-под знака квадратного и кубического корня и внесение его под знак корня. Сложение и вычитание квадратных и кубических корней. Умножение и деление квадратных и кубических корней.

3) Уравнение и системы уравнений второй степени (32 ч.). Полные и неполные квадратные уравнения. Решение квадратных уравнений с числовыми коэффициентами. Графическое решение полного квадратного уравнения с числовыми коэффициентами (при помощи графика функции $y = x^2$).— Сумма и произведение

Геометрия

1) Пропорциональные отрезки. Подобие фигур (30 ч.). Отношение и пропорциональность отрезков. Пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми.— Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.— Подобие многоугольников. Отношение их периметров и площадей.

Практические работы. Построение подобных фигур. Поперечный масштаб. Съемка земельного участка с помощью мензулы.

2) Тригонометрические функции острого угла (12 ч.). Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла. Таблицы значений тригонометрических функций. Тригонометрические шкалы счетной линейки.— Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Решение прямоугольных треугольников с помощью счетной линейки.

Практические работы. Определение недоступных высот и расстояний с применением тригонометрии.

3) Вписанные и описанные многоугольники (16 ч.). Вписанные и описанные треугольники. Свойство вписанных и описанных четырехугольников.— Правильные многоугольники. Выражение сторон правильных шестиугольников, квадратов и треугольника через радиус описанной окружности. Построение правильных вписанных многоугольников.— Площадь правильного многоугольника.— Правильная призма. Правильная пирамида. Их развертки.— Вычисление поверхно-

корней квадратного уравнения. Разложение трехчлена второй степени на линейные множители.— Решение системы уравнений, содержащей одно уравнение второй степени и одно первой степени. Решение задач при помощи составления уравнений или системы уравнений второй степени.

4) **Функции и графики (18 ч).** Переменные величины. Понятие о функциональной зависимости, аргумент и функция. Способы задания функции. Область определения и область значений функции.— Линейная функция $y = ax + b$. Доказательство теоремы: «График линейной функции есть прямая». Возрастающие и убывающие линейной функции.— Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, ее график. Знак этой функции, промежутки возрастания и убывания, наименьшее или наибольшее значение, неограниченность.— Уравнение окружности.— Вычислительные и графические упражнения с практическим содержанием.

5) Повторение (9 ч).

стей и объемов правильных призм (без доказательства).

Практические работы. Вычисление поверхностей и объемов геометрических тел по данным, полученным путем непосредственного измерения необходимых для этого величин.

4) **Сведения по стереометрии (15 ч).** Ознакомление с основными случаями взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве: пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; прямая пересекает плоскость, параллельная ей, лежит в плоскости; пересекающиеся плоскости (двугранный угол, линейный угол двугранного угла) и параллельные плоскости; перпендикулярность прямой и плоскости; высота призм и пирамид; угол прямой с плоскостью, перпендикулярность двух плоскостей (прямой двугранный угол).— Вычисление поверхностей и объемов правильных пирамид, конуса и шара.

5) Повторение (15 ч).

ПРОГРАММА ДЛЯ ТРЕХЛЕТНЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

IX класс

Алгебра и элементарные функции

1) **Степени и корни (26 ч).** Действительные числа и действия над ними.— Свойства степени с натуральным показателем. Степень с произвольным целым показателем. Степенная функция $y = ax^n$ для $n = 1, 2, 3, 4, -1, -2$.— Корень n -й степени. Арифметическое значение корня. Извлечение корня из произведения, дроби, степени и корня. Вынесение множителя из-под знака радикала и введение его под знак радикала. Преобразование $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^p}$. Приведение радикалов к нормальному виду.— Подобные радикалы. Сложение и вычитание радикалов. Умножение и деление радикалов. Степени с рациональными показателями и действия над ними. Простейшие случаи приведения числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений к рациональному виду.—

Геометрия

1) **Геометрические места точек. Геометрические преобразования (30 ч).** Понятие о геометрическом месте точек. Основные геометрические места точек: перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину; биссектриса угла; сегмент, вмещающий данный угол.— Осевая и центральная симметрия. Параллельный перенос. Вращение. Движения в плоскости. Равенство фигур.— Гомотетия и ее основные свойства. Связь гомотетии с подобием.— Применение геометрических мест и преобразований к решению задач на построение и доказательство.

2) **Метрические соотношения в круге и треугольнике (30 ч).** Теоремы о хордах, пересекающихся внутри круга, и о касательной и секущей, проведенных к кругу из точки, лежащей вне его.— Построение

Степенная функция с рациональным показателем.

2) Уравнения и неравенства (26 ч.). Уравнения первой степени с одним неизвестным (с числовыми и буквенными коэффициентами), их исследование.— Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств.— Алгебраические (функциональные) неравенства: тождественные и условные. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным.— Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (с числовыми и буквенными коэффициентами), их исследование и геометрическое истолкование.— Квадратные уравнения (с числовыми и буквенными коэффициентами), их исследование и геометрическое истолкование.— Понятие о комплексных числах и действиях над ними (в алгебраической форме).— Примеры решения иррациональных уравнений.

3) Тригонометрические функции любого угла (20 ч.). Векторы на плоскости. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Разложение вектора по данным направлениям. Координаты вектора.— Обобщение понятия о дуге и угле. Определение тригонометрических функций любого угла. Изменение тригонометрических функций. Понятие о тригонометрической функции числового аргумента.— Периодичность тригонометрических функций, их четность и нечетность. Графики тригонометрических функций.

4) Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла (10 ч.). Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Вычисление значений всех тригонометрических функций угла по данному значению одной из них.

5) Формулы приведения и их следствия (15 ч.). Формулы приведения тригонометрических функций.— Общее выражение тех значений аргумента, которым соответствует данное значение тригонометрической функции. Главные значения: $\arcsin a$; $\arccos a$; $\operatorname{arctg} a$; $\operatorname{arcctg} a$.— Доказательство тождеств и решение уравнений.

выражений $x \frac{ab}{c}$ и $x = \sqrt{ab}$ при помощи циркуля и линейки.— Соотношения между сторонами и углами в прямоугольных и косугольных треугольниках (теоремы синусов и косинусов). Вычисление площади треугольника. Формула Герона.— Задачи на решение треугольников с помощью таблиц и логарифмической линейки.

X класс

Алгебра и элементарные функции

1) Тригонометрические теоремы сложения и их следствия (38 ч.). Тригонометрические функции суммы и разности аргументов.— Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение; обратное преобразование.— Гармонические колебания $y = A \sin(\omega t + \alpha)$.— Амплитуда, частота, начальная фаза. График гармонического колебания. Приведение выражения $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ к виду гармонического колебания.— Задачи на доказательство тождеств и решение уравнений. Примеры графического решения уравнений ($\lg x = kx$ и др.).

2) Показательная и логарифмическая функция (40 ч.). Понятие о степени с иррациональным показателем.— Показательная функция, ее основные свойства и график.— Логарифм числа по данному основанию. Логарифмическая функция, ее основные свойства и график.— Логарифмы произведения, частного, степени и корня. Логарифмирование и потенцирование алгебраических выражений.— Десятичные логарифмы. Обоснование действий на логарифмической линейке. Таблицы логарифмов, их устройство, примеры вычислений с таблицами.— Решение сложных показательных и логарифмических уравнений. Графическое решение уравнения $a^x = kx + b$.

Геометрия

1) Структура курса геометрии (8 ч.). Аксиомы, определения, теоремы в математике. Обратная теорема. Необходимое и достаточное условие.— Аксиомы стереометрии и их следствия.

2) Параллельность в пространстве (20 ч.). Взаимное положение двух прямых. Признак параллельности двух прямых. Углы соответственно параллельными сторонами. Углы скрещивающихся прямых. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.— Основные свойства параллельных проекций. Примеры построения изображений плоских и пространственных фигур. Простейшие задачи на построение.

3) Перпендикулярность в пространстве (16 ч.). Определения перпендикуляра и плоскости. Теорема о двух перпендикулярах. Построение плоскости, перпендикулярной к прямой, и обратная задача. Ортогональная проекция. Перпендикуляры и наклонные. Теорема о трех перпендикулярах. Угол прямой с плоскостью.— Двугранные углы и их измерение. Перпендикулярные плоскости. Свойство многогранных углов.

4) Геометрические места и преобразования в пространстве (14 ч.). Основные геометрические места точек в пространстве: плоскость, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину; биссектральная плоскость двугранного угла.— Симметрия относительно плоскости. Параллельный перенос, вращение вокруг оси.

5) Многогранники (20 ч.). Призматическая поверхность. Призмы. Боковая и полная поверхность призмы. Параллелепипеды. Свойство диагоналей параллелепипеда.— Пирамида. Свойство параллельных сечений пирамиды. Боковая поверхность пирамиды (полной и усеченной).— Понятие о правильных многогранниках.

XI класс

Алгебра и элементарные функции

1) **Функции и пределы (20 ч).** Общее понятие функции. Обозначение функциональной зависимости и его использование: $f(a)$; $f(x \pm a)$; $f(A/x)$ и т. д.— Возрастание и убывание функций.— Четные и нечетные функции, свойства их графиков.— Понятие о числовой последовательности. Примеры числовых последовательностей. Общий член числовой последовательности. Понятие о математической индукции.— Арифметические и геометрические прогрессии, формулы общих членов и суммы первых n членов этих прогрессий.— Понятие о пределе числовой последовательности. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного (без доказательства).— Существование предела монотонной ограниченной последовательности (без доказательства).— Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную.— Предел переменной величины, предел функции. Понятие о непрерывности функции.

2) **Производная (16 ч).** Скорость прямолинейного движения, понятие о скорости в данный момент. Приращение аргумента и приращение функции, производная. Геометрический смысл производной, касательная к кривой линии.— Производная суммы и произведения функций, отношения двух функций, степени с целым положительным показателем, многочлена. Производная степенной функции с любым показателем (без доказательства). Производная тригонометрических функций. Понятие второй производной.

3) **Исследование функций (12 ч).** Признаки возрастания и убывания функции. Максимум и минимум, их нахождение по производной.— Построение графиков функции с использованием производной. Приложения к графическому решению уравнений.

4) **Уравнения высших степеней (10 ч).** Деление расположенных многочленов. Теорема Безу. Применение теоремы Безу к разложению многочленов на множители. Целые корни алгебраических уравнений.

5) **Повторение (12 ч).**

Геометрия

1) **Измерение величин в геометрии (14 ч).** Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Отношение отрезков. Длина окружности и дуги. Площадь круга и его частей.

2) **Круглые тела и их поверхности (18 ч).** Цилиндрическая поверхность. Цилиндр вращения, его развертка и поверхность.— Коническая поверхность. Конусы: полный и усеченный, их развертки. Боковая поверхность конуса (полного и усеченного).— Сфера и шар. Изображение шара. Взаимное положение плоскости и сферы. Плоскость, касательная к сфере. Поверхность сферы и ее частей.

3) **Измерение объемов (18 ч).** Общее определение объема. Объем призмы и цилиндра. Формула Симпсона. Объем пирамиды и конуса (полных и усеченных). Объем шара и его частей.

4) **Решение задач и повторение курса геометрии (20 ч).**

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОЕКТУ ПРОГРАММЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

В. Г. Ашкинuze, В. И. Левин, А. Д. Семушин
(Москва)

Традиционное содержание школьного курса математики уже давно не удовлетворяет предъявляемым к нему требованиям. При том массовом характере, который имеет школьное обучение в нашей стране, серьезные изменения в содержании образования практически могут совершаться лишь с большой постепенностью. Однако в настоящий момент, при определении содержания курса математики в перестраиваемой средней школе, должен быть сделан существенный шаг в деле реформы этого курса.

Успешному решению задачи во многом может помочь активное участие научной математической общественности. Насколько интересные результаты может дать такое участие, показывает хотя бы программа, составленная В. Г. Болтянским, Н. Я. Виленкиным и И. М. Ягломом¹⁾. В ней отражено много новых прогрессивных идей, постепенное освоение которых нашей школой несомненно внесло бы свежую струю в обучение математике. Однако в целом эта программа настолько далека от сложившейся системы преподавания математики, что осуществление ее в массовом порядке в ближайшем будущем не представляется возможным, даже если бы существовали соответствующие учебники.

Практической основой перестройки курса математики средней школы является в настоящее время проект программы, опубликованный Министерством просвещения РСФСР²⁾. Этот проект ориентирован на решение новых задач, стоящих перед советской школой. Однако при его разработке были по необходимости приняты во внимание не только чисто научные и методические принципы, но и ряд организационных моментов, вытекающих из задачи скорейшего практического осуществления новой программы. Кроме того, этот проект в силу самой истории его возникновения не может не нести на себе печати многих различных, иногда противоположных точек зрения. По этим причинам ряд методических вопросов, в том числе и принципиальных, решен проектом программы

¹⁾ «Математическое просвещение», вып. 4, стр. 131—143.

²⁾ Стр. 118—126 настоящего выпуска. (Ред.)

половинчато, недостаточно последовательно. По нашему мнению, общие идеи, лежащие в основе этого проекта, можно было бы провести в нем более последовательно и решительно, оставаясь при этом в рамках практически осуществимого — если не немедленно, то по крайней мере в ближайшие несколько лет.

Остановимся на этих вопросах более подробно.

1. В курсе арифметики¹⁾ проект новой программы создает по сравнению с действующей программой более благоприятные условия для усвоения учащимися необходимых вычислительных навыков, увеличивая время, отводимое на изучение десятичных дробей. Однако простое перераспределение учебного времени может оказаться недостаточным для достижения надлежащей вычислительной культуры учащихся. По нашему мнению, для этой цели следует пересмотреть всю систему изучения арифметики в V классе, *изменив порядок изучения обыкновенных и десятичных дробей*. Такой пересмотр обеспечит каждому из разделов курса арифметики место, соответствующее его образовательному и практическому значению; он даст также ряд методических преимуществ, на которые уже неоднократно указывалось.

2. В курсе алгебры восьмилетней школы проект новой программы предусматривает сближение раздела тождественных преобразований с их применением к решению уравнений. Однако такое сближение ограничено в этом проекте рамками VII класса; изучаемые же в VI классе тождественные преобразования оказываются по-прежнему оторванными от приложений. Не предлагая такой радикальной перепланировки курса алгебры, какая имеется в программе В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина и И. М. Яглома, мы считаем, что было бы более последовательным *ознакомить учащихся с общим приемом решения линейных уравнений уже в шестом классе, с тем чтобы изучение всего раздела тождественных преобразований могло сопровождаться решением соответствующих уравнений*.

3. В курсе геометрии следует пересмотреть вопрос о месте изучения стереометрического материала в восьмилетней школе. Здесь под влиянием различных точек зрения проект программы идет по некоторому среднему пути. Однако такой средний путь не является наиболее удачным, и это неизбежно будет обнаружено при практическом осуществлении его в школе. По нашему мнению, *весь стереометрический материал, который должен входить в курс восьмилетней школы, может быть изучен параллельно с планиметрическим материалом*, в тесной связи с ним, без нарушения общей структуры курса планиметрии. Несомненно могут быть найдены конкретные пути такого распределения стереометрического материала в курсе геометрии, при котором ознакомление учащихся с пространственными формами будет способствовать более глубокому пониманию планиметрии.

¹⁾ В настоящем выпуске проект программы по арифметике не помещен. См. «Математика в школе», 1959, № 4, стр. 5—6. (Ред.)

4. В целях создания наиболее благоприятных условий для усвоения курса геометрии следовало бы *начинать изучение геометрии не в VI, а в V классе*. Нужно для этого небольшое время можно было бы выделить за счет более рационального построения курса арифметики (см. выше п. 1). При этом мы не можем согласиться с предложением В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина и И. М. Яглома ввести в V классе отдельный пропедевтический концентр геометрии. По нашему мнению, в V классе следует ознакомить учащихся с такими понятиями, как отрезок, угол и т. п., — разумеется, на чисто наглядной основе, но таким образом, чтобы можно было впоследствии не изучать их заново. Перенесение начала курса геометрии в V класс позволило бы преодолеть многие трудности, возникающие при построении курса геометрии восьмилетней школы.

5. Курс «Алгебра и элементарные функции» в IX—XI классах имеет в проекте новой программы трехлетней школы отчетливо выраженный функциональный характер, и некоторые чисто алгебраические вопросы («Комплексные числа» в IX классе, «Уравнения высших степеней» в XI классе) представляются в нем обособленными, стоящими вне основного направления курса. По своему прикладному значению эти вопросы значительно уступают другим разделам программы. Что же касается общеобразовательного значения указанных вопросов с точки зрения логического завершения развития понятия числа и теории алгебраических уравнений, то и его не следует переоценивать. При том объеме, в котором могут быть изучены в школе комплексные числа, они будут представляться учащимся пустыми символами, лишенными конкретного содержания, и основанная на них логическая завершенность (требующая к тому же сообщения основных фактов без доказательства) неизбежно будет лишь словесной, иллюзорной. Во всяком случае, то ценное в образовательном отношении, что содержится в указанных вопросах, может быть сообщено учащимся за один час в порядке обзорной беседы в конце курса одиннадцатилетней (или даже восьмилетней) школы. Как самостоятельные же вопросы «Комплексные числа» и «Уравнения высших степеней» при существующей напряженности программы курса «Алгебра и элементарные функции» следовало бы из него исключить.

6. Включение в программу средней школы элементов дифференциального исчисления является серьезным шагом вперед в развитии преподавания математики. Этот шаг нельзя считать завершенным, пока в курс средней школы не войдет также понятие интеграла с его геометрическими и физическими приложениями. Однако, по-видимому, целесообразно дать нашей школе возможность сначала освоить элементы дифференциального исчисления.

В связи с этим следует также отметить, что *проект программы неоправданно обеднен исключением из него такого важного в общеобразовательном и прикладном отношении понятия, как понятие дифференциала*, место которого заняли упоминавшиеся выше (п. 5)

темы «Комплексные числа» и «Уравнения высших степеней». Таким образом, вводимое в курс средней школы понятие производной оказывается отделенным от основной идеи дифференциального исчисления — от простой и важной идеи приближенной замены любого процесса линейным.

7. Введенные в среднюю школу элементы дифференциального исчисления должны быть не инородным придатком к курсу элементарной математики, а органической частью всего школьного курса. Это было бы достигнуто в гораздо большей степени, если бы *изучение элементов дифференциального исчисления не было сосредоточено лишь в выпускном классе, а проводилось постепенно, на протяжении всего курса старших трех классов параллельно с изучением конкретных элементарных функций*. Такое построение курса «Алгебра и элементарные функции» не только создало бы наиболее благоприятные условия для овладения понятием производной, но и открыло бы широкие возможности для его использования в смежных дисциплинах.

Ниже приводится примерная программа такого построения курса «Алгебра и элементарные функции». Следует отметить, что благодаря рациональному расположению материала эта программа оказывается значительно менее напряженной во времени, чем официальный проект, хотя она содержит несколько больший объем материала.

IX класс (3 часа в неделю в первом полугодии и 2 часа во втором, всего 95 часов)

1) Линейная функция и ее приложения (18 ч.) Линейная функция и ее график. Линейные уравнения с одним неизвестным (с числовыми и буквенными коэффициентами) и системы линейных уравнений, их геометрическое представление — ¹⁾. Свойства числовых неравенств: почленное сложение неравенств, умножение обеих частей неравенства на одно и то же число. — Алгебраические (функциональные) неравенства: тождественные и условные. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным. — Арифметическая прогрессия как линейная функция натурального аргумента. Сумма членов арифметической прогрессии. — Решение задач на составление уравнений, неравенств и систем уравнений.

2) Квадратная функция и ее приложения (16 ч.). Квадратная функция и ее график. Решение квадратных уравнений с числовыми и буквенными коэффициентами. Решение неравенств второй степени с одним неизвестным. — Системы уравнений, содержащие два уравнения второй степени (частные случаи). Графическое решение простейших систем уравнений. — Решение задач на составление уравнений, неравенств и систем уравнений.

3) Степенная функция с натуральным показателем (8 ч.) Обозначение функциональной зависимости и его использование. Степенная функция $y = x^n$ при $n = 2, 3, 4, 5$. Четные и нечетные функции, симметрия их

¹⁾ Здесь и дальше знак «тире» в тексте программы отделяет один круг вопросов от другого.

графиков. Изменение свойств степенной функции с изменением показателя степени.

4) Производная и ее приложения (30 ч.). Действительные числа и действия над ними. Понятие о пределе переменной величины, примеры.— Скорость прямолинейного движения, понятие о мгновенной скорости. Приращение аргумента и приращение функции, производная. Геометрический смысл производной, касательная к кривой линии.— Возрастание и убывание функции, условия возрастания и убывания.— Производная суммы и произведения функций. Производная степени с натуральным показателем. Производная многочлена. Исследование многочленов на возрастание и убывание и построение их графиков. Приложения к графическому решению уравнений.— Производная частного двух функций. Построение графиков рациональных функций.— Максимум и минимум функции, их нахождение с помощью производной. Решение задач на максимум и минимум.— Понятие о дифференциале как приближенном значении приращения функции. Приближенное вычисление значений многочлена. Применение к приближенному решению уравнений.

5) Тригонометрические функции любого угла (23 ч.). Понятие о векторе. Равенство векторов. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по данным направлениям. Координаты вектора.— Определение тригонометрических функций любого угла. Изменение тригонометрических функций. Понятие о тригонометрической функции числового аргумента.— Периодичность тригонометрических функций, их четность и нечетность. Графики тригонометрических функций.

Х класс (2 часа в неделю, всего 78 часов)

1) Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла (6 ч.). Алгебраические соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Вычисление значений всех тригонометрических функций угла по данному значению одной из них.

2) Формулы приведения и их следствия (12 ч.). Формулы приведения тригонометрических функций. Общее выражение тех значений аргумента, которым соответствует данное значение тригонометрической функции. Главные значения: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Доказательство тождеств и решение уравнений.

3) Тригонометрические теоремы сложения и их следствия. (24 ч.). Тригонометрические функции суммы и разности аргументов. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение; обратное преобразование.— Доказательство тождеств и решение уравнений.— Гармоническое колебание $y = A \sin(\omega x + a)$; амплитуда, частота, начальная фаза; график гармонического колебания. Приведение к этому виду выражения $a \sin \omega x + b \cos \omega x$.— Графическое решение уравнений $\sin \omega x = kx + b$, $\cos \omega x = kx + b$, $\operatorname{tg} \omega x = kx + b$.

4) Производные тригонометрических функций и их приложения (12 ч.). Производные функций $\sin kx$, $\cos kx$, $\operatorname{tg} kx$. Исследование функций, выраженных через тригонометрические функции, и построение их графиков.— Дифференциалы тригонометрических функций. Приближенное вычисление значений тригонометрических функций.— Решение задач на максимум и минимум.

5) Степени и корни. Степенная функция с рациональным показателем (24 ч.). Свойство степени с натуральным показателем. Степень с произвольным целым показателем. Степенная функция с целым показателем.— Корень n -й степени. Арифметическое значение корня. Степень с рациональным показателем.— Действие над степенями с дробными показате-

лями и корнями.—Примеры степенных функций с дробными показателями. Производная степени с произвольным показателем (без доказательства).—Исследование некоторых иррациональных функций и построение их графиков. Решение задач на максимум и минимум,

XI класс (2 часа в неделю, всего 78 часов)

1) Показательная функция (18 ч.). Понятие о степени с иррациональным показателем. Показательная функция, ее свойства и график. Понятие о порядке роста показательной функции.—Геометрическая прогрессия как показательная функция натурального аргумента. Сумма членов геометрической прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.—Графическое решение уравнений вида $a^x = kx + b$.—Число e . Производная показательной функции. Закон органического роста.

2) Логарифмическая функция (24 ч.). Понятие об обратной функции. Взаимное расположение графиков обратных функций.—Логарифм числа по данному основанию. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Производная логарифмической функции.—Логарифмы произведения, частного, степени и корня. Логарифмирование и потенцирование алгебраических выражений.—Десятичные логарифмы. Обоснование действий на логарифмической линейке. Таблицы логарифмов, их устройство и употребление. Примеры вычислений при помощи таблиц логарифмов.

3) Повторение курса алгебры (36 ч.).

II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ В РЯД ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Э. Э. Балаш

(Москва)

Простейшее разложение логарифмической функции в ряд имеет вид

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots \quad (1)$$

Областью сходимости этого ряда на комплексной плоскости является круг радиуса 1 с центром в точке $z=1$.

Из формулы (1) может быть выведена формула

$$\ln z = \frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 + \dots \quad (2)$$

Областью сходимости ряда (2) является полуплоскость $R(z) > \frac{1}{2}$, где $R(z)$ — действительная часть комплексного числа z .

В настоящей работе будет получено разложение логарифмической функции в ряд¹⁾

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{(z-1)^{2k-1}}{Q_{k-1}(z) Q_k(z)}, \quad (3)$$

где

$$Q_k(z) = z^k + (C_k^1)^2 z^{k-1} + (C_k^2)^2 z^{k-2} + \dots + 1,$$

и будет доказано, что областью сходимости этого ряда является *вся плоскость комплексного переменного*, за исключением луча неположительных действительных чисел.

С помощью формулы (3) будут получены разложение логарифма в цепную дробь (формула Эйлера) и аналогичное разложение в цепную дробь для арктангенса.

¹⁾ Другое освещение этого результата см. в заметке Э. Э. Шнюля, помещенной на стр. 152—153 настоящего выпуска. (Прим. ред.).

При выводе формулы (3) будут использованы свойства аппроксимирующих последовательностей гармонической последовательности, а также свойства их производящих функций¹⁾.

1. Условимся сначала рассматривать действительные $z \geq 1$. Для таких z $0 \leq \frac{z-1}{z} < 1$ и, следовательно, ряд (2) сходится.

Заменим в формуле (2) коэффициенты $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ членами n -й аппроксимирующей последовательности — последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением n -го порядка (суммой n геометрических прогрессий), $2n$ первых членов которой равны $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2n}$. Суммой полученного ряда является некоторая дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой обозначим соответственно через $R_n(z)$ и $Q_n(z)$:

$$\frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = u_0^{(n)} \frac{z-1}{z} + u_1^{(n)} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + u_2^{(n)} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 + \dots \quad (4)$$

Из неравенств²⁾

$$0 < u_k^{(n-1)} \leq u_k^{(n)} \leq \frac{1}{k+1}$$

следует, что ряд (4) сходится при всех $z \geq 1$ и что

$$0 \leq \frac{R_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} \leq \frac{R_n(z)}{Q_n(z)} \leq \ln z.$$

Так как сумма ряда (2) равна $\ln z$ и так как в силу положительности членов аппроксимирующей последовательности

$$\frac{z-1}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{z-1}{z} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z-1}{z} \right)^n \leq \frac{R_n(z)}{Q_n(z)},$$

то при всех $z \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = \ln z.$$

Выведем формулу для $Q_n(z)$ и некоторые другие формулы. Сравнивая формулу (4) с формулой

$$\frac{L_n(t)}{M_n(t)} = u_0^{(n)} t + u_1^{(n)} t^2 + u_2^{(n)} t^3 + \dots,$$

¹⁾ См. (I) Э. Э. Балаш, Аппроксимирующие последовательности гармонической последовательности, «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 173—179 и (II) Э. Э. Балаш, Производящие функции аппроксимирующих последовательностей, «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 139—145. В дальнейших ссылках мы будем обозначать эти статьи цифрами (I) и (II).

²⁾ См. (II) п. 5.

определяющей производящую функцию аппроксимирующей последовательности¹⁾, получаем:

$$\frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{L_n\left(\frac{z-1}{z}\right)}{M_n\left(\frac{z-1}{z}\right)}. \quad (5)$$

Так как многочлены $R_n(z)$ и $Q_n(z)$ определены пока лишь с точностью до общего множителя, то можно положить

$$R_n(z) = z^n L_n\left(\frac{z-1}{z}\right), \quad Q_n(z) = z^n M_n\left(\frac{z-1}{z}\right). \quad (5a)$$

Используя формулу²⁾

$$M_n(t) = (1-t)^n + (C_n^1)^2 (1-t)^{n-1} + (C_n^2)^2 (1-t)^{n-2} + \dots + 1,$$

получаем:

$$Q_n(z) = z^n + (C_n^1)^2 z^{n-1} + (C_n^2)^2 z^{n-2} + \dots + 1. \quad (6)$$

Далее, из формул³⁾

$$\frac{L_n(t)}{M_n(t)} = \int_0^t \frac{[M_n(u)]^2 - u^{2n}}{(1-u)[M_n(u)]^2} du$$

и

$$\frac{L_n(t)}{M_n(t)} - \frac{L_{n-1}(t)}{M_{n-1}(t)} = \frac{2}{n} \frac{t^{2n-1}}{M_{n-1}(t) M_n(t)}$$

следует:

$$\frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = \int_1^z \frac{[Q_n(v)]^2 - (v-1)^{2n}}{v [Q_n(v)]^2} dv \quad (7)$$

и

$$\frac{R_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{R_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} = \frac{2}{n} \frac{(z-1)^{2n-1}}{Q_{n-1}(z) Q_n(z)}. \quad (8)$$

2. Рассмотрим частичные суммы ряда (3). Из формулы (8) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \frac{(z-1)^{2k-1}}{Q_{k-1}(z) Q_k(z)} = \frac{R_n(z)}{Q_n(z)}. \quad (8a)$$

Так как при $z \geq 1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = \ln z$, то отсюда следует сходимость ряда (3) для этих z , причем сумма ряда (3) равна $\ln z$.

¹⁾ См. (II), п. 1.

²⁾ См. (II), п. 3, формула (4).

³⁾ См. (II), п. 7, формула (11) и п. 4, формула (5).

Докажем теперь сходимость ряда (3) для всех z из интервала $(0, 1)$. Если $z \geq 1$, то $0 < \frac{1}{z} < 1$. Заменяем в формуле (8а) z на $\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} \frac{R_n\left(\frac{1}{z}\right)}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \frac{\left(\frac{1}{z} - 1\right)^{2k-1}}{Q_{k-1}\left(\frac{1}{z}\right) Q_k\left(\frac{1}{z}\right)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \frac{(1-z)^{2k-1}}{Q_{k-1}(z) Q_k(z)} = -\frac{R_n(z)}{Q_n(z)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n\left(\frac{1}{z}\right)}{Q_n\left(\frac{1}{z}\right)} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = -\ln z = -\ln \frac{1}{z},$$

т. е. ряд (3) действительно сходится для всех z из интервала $(0, 1)$ и сумма его снова равна $\ln z$. Легко проверить, что при $z=0$ ряд (3) расходится.

В дальнейшем мы будем изучать сходимость ряда (3) уже для произвольных комплексных z . Если не рассматривать отрицательных z , то все члены ряда (3) имеют смысл, так как многочлены $Q_k(z)$ имеют только отрицательные действительные корни¹⁾.

3. Теорема 1. Если z не является отрицательным числом, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} = (\sqrt{z} + 1)^2$.

Здесь под \sqrt{z} понимается арифметическое значение корня, если z — действительное положительное число и главное значение корня, т. е. то его значение, для которого $-\frac{\pi}{2} < \arg \sqrt{z} < \frac{\pi}{2}$, если z — мнимое число (на комплексной плоскости \sqrt{z} находится в правой полуплоскости).

При доказательстве теоремы будет использована рекуррентная формула

$$Q_n(z) = \frac{2n-1}{n} (z+1) Q_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} (z-1)^2 Q_{n-2}(z). \quad (9)$$

Эту формулу можно проверить, сравнив коэффициенты при одинаковых степенях z [при этом, разумеется, используется формула (6)].

Из формулы (9) вытекает, что

$$\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} = \frac{2n-1}{n} (z+1) - \frac{n-1}{n} \frac{(z-1)^2}{\frac{Q_{n-1}(z)}{Q_{n-2}(z)}}. \quad (9a)$$

¹⁾ Это следует из того, что корни характеристических уравнений для аппроксимирующих последовательностей действительны и расположены в интервале $(0, 1)$. См. (1), п. 4, теорема 2.

Рассмотрим функции $\delta_n = \delta_n(z)$, которые определим с помощью соотношений

$$\frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} = z + 1 + 2\sqrt{z} \cdot \delta_n. \quad (10)$$

Нам надо доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} = z + 1 + 2\sqrt{z}$, а для этого достаточно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1$.

Из формул (9а) и (10) следует, что

$$\frac{n}{n-1} \delta_n = \frac{2\sqrt{z} + (z+1)\delta_{n-1}}{(z+1) + 2\sqrt{z}\delta_{n-1}},$$

откуда

$$\frac{1 - \frac{n}{n-1} \delta_n}{1 + \frac{n}{n-1} \delta_n} = \frac{(1 - \delta_{n-1})(\sqrt{z} - 1)^2}{(1 + \delta_{n-1})(\sqrt{z} + 1)^2}. \quad (11)$$

Докажем, что $\left| \frac{1 - \delta_n}{1 + \delta_n} \right| < 1$, если $n > 1$.

Необходимым и достаточным условием выполнения неравенства $\left| \frac{1 - \delta_n}{1 + \delta_n} \right| < 1$ является условие $R(\delta_n) > 0$. Поэтому будем доказывать индукцией по n , что $R(\delta_n) > 0$.

Так как, по предположению индукции, $R(\delta_{n-1}) > 0$, то $\left| \frac{1 - \delta_{n-1}}{1 + \delta_{n-1}} \right| < 1$. Ввиду того, что под \sqrt{z} понимается главное значение корня, также и $R(\sqrt{z}) > 0$, откуда $\left| \frac{1 - \sqrt{z}}{1 + \sqrt{z}} \right|^2 < 1$. Далее, применяя формулу (11),

получаем $\left| \frac{1 - \frac{n}{n-1} \delta_n}{1 + \frac{n}{n-1} \delta_n} \right| < 1$. Следовательно, $R\left(\frac{n}{n-1} \delta_n\right) > 0$ и

$R(\delta_n) > 0$.

Но $\left| \frac{1 - \bar{\epsilon}_n}{1 + \bar{\epsilon}_n} \right| = \alpha_n$, $|\theta_n| = \alpha_{n-1} \vartheta$, где $\vartheta = \left| \frac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 1} \right|^2 < 1$. Следовательно,

$$\alpha_n < \alpha_{n-1} \vartheta + \frac{1}{n-1}. \quad (12)$$

Докажем, что при любом n

$$\alpha_n < \frac{2}{1 - \vartheta} \frac{1}{n}. \quad (13)$$

Если $n \leq \frac{2}{1 - \vartheta}$, то неравенство выполнено, так как $\alpha_n < 1$. Если же $n > \frac{2}{1 - \vartheta}$, то неравенство доказывается по индукции; при этом используется формула (12).

Из неравенства (13) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}_n = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(z)}{Q_{n-1}(z)} = (\sqrt{z} + 1)^2.$$

4. Теорема 2. Ряд (3) сходится для всех комплексных z , кроме отрицательных и $z=0$, и его сумма равна $\ln z$.

Здесь под $\ln z$ понимается главное значение логарифма, т. е.

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \text{ где } -\pi < \arg z < \pi.$$

Для доказательства теоремы надо рассмотреть разность $\ln z - \frac{R_n(z)}{Q_n(z)}$.

Из формулы (7)¹) следует:

$$\ln z - \frac{R_n(z)}{Q_n(z)} = \int_1^z \frac{(v-1)^{2n}}{v [Q_n(v)]^2} dv. \quad (7a)$$

Применяя теорему 1, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n-1}(v)(v-1)}{Q_n(v)} = \frac{\sqrt{v} - 1}{\sqrt{v} + 1}.$$

Так как $\left| \frac{\sqrt{v} - 1}{\sqrt{v} + 1} \right| < 1$, то можно указать такое число $c < 1$, что для любого v на промежутке интегрирования от 1 до z

$$\left| \frac{Q_{n-1}(v)(v-1)}{Q_n(v)} \right| < c$$

для всех n , больших некоторого n_0 .

¹) Формула (7), доказанная нами для действительных $z \geq 1$, имеет место для произвольного комплексного числа z кроме z действительных отрицательных и $z=0$. Это вытекает из того, что в левой и правой частях формулы (7) стоят аналитические функции z .

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{(v-1)^{2n}}{[Q_n(v)]^2} \right| = \prod_{k=1}^n \left| \frac{Q_{k-1}(v)(v-1)}{Q_k(v)} \right|^2$$

с увеличением n может быть сделано меньше любого числа ε , общего для всех v от 1 до z . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^z \frac{(v-1)^{2n}}{v [Q_n(v)]^2} dv = 0,$$

откуда вытекает сходимость ряда (3).

5. Покажем, что многочлены $Q_n(z)$ тесно связаны с полиномами Лежандра.

Полиномы Лежандра $P_n(r)$ можно определить с помощью рекуррентной формулы

$$P_n(r) = \frac{2n-1}{n} \cdot r P_{n-1}(r) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(r) \quad (14)$$

и начальных условий $P_0(r) = 1$ и $P_1(r) = r$. Если сравнить формулы (9) и (14), то заметно их большое сходство.

Из (9) вытекает следующее рекуррентное соотношение, связывающее дробь $\frac{Q_n(z)}{(z-1)^n}$:

$$\frac{Q_n(z)}{(z-1)^n} = \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{Q_{n-1}(z)}{(z-1)^{n-1}} - \frac{n-1}{n} \frac{Q_{n-2}(z)}{(z-1)^{n-2}}. \quad (9б)$$

Так как $\frac{Q_0(z)}{(z-1)^0} = 1$ и $\frac{Q_1(z)}{(z-1)^1} = \frac{z+1}{z-1}$, то из формул (14) и (9б) вытекает, что

$$\frac{Q_n(z)}{(z-1)^n} = P_n\left(\frac{z+1}{z-1}\right). \quad (15)$$

Преобразовав с помощью формулы (15) правую часть формулы (3), получаем:

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{1}{P_{k-1}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \cdot P_k\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \quad (16)$$

Используя неравенство¹⁾

$$|P_n(r)| < \left[\frac{\pi}{2n(1-r^2)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

имеющее место для полиномов Лежандра, если $-1 < r < 1$, можно доказать, что при любом отрицательном z ряд (16), а следовательно и ряд (3), расходится.

¹⁾ См., например, Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948.

6. Применим результаты, полученные для логарифма к арктангенсу. Условимся рассматривать функцию $\operatorname{arctg} x$ только для действительных x . Воспользуемся формулой

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}, \quad (17)$$

связывающей главные значения арктангенса и логарифма. Из формул (17) и (16) вытекает, что

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{P_{k-1} \left(\frac{1}{ix} \right) P_k \left(\frac{1}{ix} \right)}. \quad (18)$$

Отметим, что, несмотря на то, что в формулу (18) входит число i , каждое слагаемое в правой части формулы является действительным числом.

7. С помощью формулы (16) может быть получено разложение логарифма в цепную дробь:

$$\ln z = \ln \frac{r+1}{r-1} = \frac{2}{r - \frac{1}{3r - \frac{4}{5r - \frac{9}{7r \dots}}}} \quad (19)$$

(впервые полученное Л. Эйлером).

Для доказательства формулы (19) надо сначала найти рекуррентную формулу для знаменателей подходящих дробей и с ее помощью доказать, что знаменатель k -й подходящей дроби равен $k! \cdot P_k(r)$. Затем надо доказать, что подходящие дроби совпадают с частичными суммами ряда (16). Для этого рассматриваем разность двух подходящих дробей.

С помощью формулы (19) получаем разложение в цепную дробь арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \dots}}}}. \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАДАЧЕ РАДО

В. А. Залгаллер

(Ленинград)

1. Содержание проблемы. В 1928 г. в польском журнале *Fundamenta mathematicae* был опубликован отрывок из письма известного венгерского математика Тибора Радо к редактору журнала Вацлаву Серпинскому. В этом письме Радо обращал внимание Серпинского на одну геометрическую задачу, возникшую в связи с вопросами, относящимися к теории функций действительного переменного¹⁾. Вот в чем состоит эта задача.

Рассмотрим сначала конечную систему отрезков, расположенных на одной прямой и покрывающую некоторую область Φ этой прямой (например, один большой отрезок) имеющую длину l (AB на рис. 1). Поставим задачу — определить, *какую часть области Φ возможно покрыть непересекающимися отрезками, взятыми из этой системы?*

Легко указать способ выбора непересекающихся отрез-

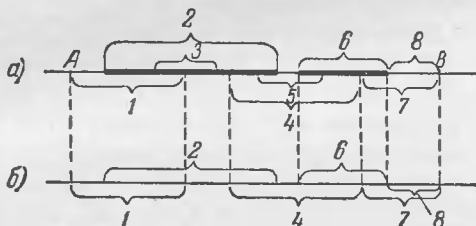


Рис. 1.

ков, покрывающих область, имеющую длину $l_1 \geq \frac{l}{3}$. Выберем самый большой отрезок нашей системы (отрезок 2 на рис. 1, а), имеющий длину m , и отбросим все отрезки, пересекающиеся с ним (отрезки 1, 3, 4, 5). Часть области, покрытая отброшенными отрезками, не будет превышать $2m$. Затем выберем самый большой из оставшихся отрезков (отрезок 6), длиной n , и снова отбросим все отрезки пересекающиеся с ним (5 и 7) — они покрывают область длиной $\leq 2n$. Поступая дальше таким же образом, мы выделим из нашей системы отрезков подсистему непересекающихся отрезков²⁾, имеющих общую длину $l_1 = m + l + \dots$; при этом область, которую покрывают все

¹⁾ T. Radó, Sur une problème relatif a une théorème de Vitali, Fund. math. 11, 1928, 228—229.

²⁾ На рис. 1 дело ограничивается выбором трех отрезков — 2, 6 и 8.

отброшенные отрезки, имеет длину $\bar{l} \leq 2l_1$. Отсюда и получаем оценку $l_1 \geq \frac{l}{3}$.

Однако эта оценка не является точной. Для доказательства этого отбросим с самого начала те из наших отрезков, каждый из которых целиком покрыт какими-либо другими отрезками этой же системы (на нашем рис. 1 это будут отрезки 3, лежащий внутри 2, 5 — внутри 4 и 7 — покрываемый отрезками 6 и 8). Оставшиеся отрезки (1, 2, 4, 6, 8) можно разделить на «четные» и «нечетные», причем так, что никакие два «четных» или два «нечетных» отрезка не пересекаются между собой (рис. 1, б). Поэтому эти две подсистемы (1, 4, 8 и 2, 6) состоят из непересекающихся отрезков, а так как обе они полностью покрывают Φ , то общая длина отрезков хотя бы одной из них $l_1 \geq \frac{l}{2}$.

Эта оценка уже является точной; для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть систему четного числа равных отрезков, общими точками которых являются лишь их концы.

Перейдем теперь к аналогичной задаче на плоскости. Пусть некоторая область Φ плоскости, имеющая площадь S (например — один прямоугольник площади S) покрыта системой квадратов с параллельными сторонами. *Какую часть области Φ могут покрывать непересекающиеся квадраты, принадлежащие этой системе?*

Будем рассуждать так же, как и в случае прямой линии. Выбирая самый большой из квадратов системы и отбрасывая все пересекающиеся с ним; затем оставляя самый большой из оставшихся квадратов и отбрасывая все пересекающие этот квадрат и т. д., мы выделим систему непересекающихся квадратов общей площади $S_1 \geq \frac{S}{9}$. Однако напрашивающаяся аналогия со случаем прямой (и конкретные примеры систем квадратов) подсказывают, что *всегда существует и система непересекающихся квадратов общей площади $S_1 \geq \frac{S}{4}$* . Тибору Радо не удалось доказать справедливость последнего утверждения.

Таким образом, гипотеза Т. Радо состоит в следующем:

На плоскости из любой системы параллельно расположенных квадратов можно выбрать такую систему непересекающихся квадратов, для которой $S_1 \geq \frac{S}{4}$, где S — площадь, покрытая исходной системой квадратов, а S_1 — площадь выбранных квадратов. Эта гипотеза до сих пор остается недоказанной.

В 1940 г. молодой ленинградский математик А. С. Соколин весьма просто показал, что утверждение Т. Радо будет справедливо для всех систем равных квадратов¹⁾. Действительно, рассмотрим

¹⁾ А. С. Соколин, Об одной задаче Радо, Доклады АН СССР 26, № 9 (1940), стр. 868—869.

произвольную систему точек на плоскости, образующих квадратную решетку со стороной 2 (за единицу длины мы принимаем сторону квадратов системы). В силу известной теоремы Бликфельда¹⁾, нашу область Φ с покрывающими ее квадратами можно сдвинуть так, чтобы она покрыла не менее $\frac{S}{4}$ точек решетки. Оставив теперь по одному квадрату, покрывающему каждую точку решетки, мы приходим к системе квадратов, которые 1) не перекрываются (так как покрывают достаточно удаленные друг от друга точки) и 2) имеют общую площадь $S_1 \geq \frac{S}{4}$.

В 1950 г. другой венгерский математик Р. Радо опубликовал обширный мемуар²⁾, явно навеянный заметкой Т. Радо. Р. Радо решил ряд задач, аналогичных задаче Радо; так, например, он доказал, что если фигура Φ площади S покрыта конечным числом равных треугольников с параллельными сторонами, то из этих треугольников можно выбрать неперекрывающиеся треугольники общей площади $S_1 \geq \frac{S}{6}$ (причем эта оценка является точной); аналогичные результаты получены для систем равных кругов и для некоторых других фигур. Однако Р. Радо также не смог решить проблему Т. Радо; он лишь повторил (со ссылкой на А. С. Безиковича), по-видимому, неизвестный ему результат А. С. Соколина и слегка улучшил очевидный результат $S_1 \geq \frac{S}{9}$ для случая неравных квадратов, заменив его оценкой $S_1 \geq \frac{S}{8,75}$.

В настоящей заметке мы указываем некоторые новые подходы к задаче Радо; однако полученная здесь оценка

$$S_1 > \frac{1}{8,6} S \quad (1)$$

лишь весьма немногим превосходит оценку Р. Радо.

2. Доказательство оценки (1). Пусть K — наибольший из квадратов исходной системы; его размер (т. е. длину его стороны) считаем равным 1. Систему квадратов, имеющих общие точки с K (включая самый квадрат K), обозначим $[K]$. Если покрытая $[K]$ площадь $\leq 8,5$, то мы выбираем квадрат K , исключаем все остальные квадраты $[K]$ и продолжаем выбор для оставшейся системы. Поэтому будем далее считать, что покрытая $[K]$ площадь

$$\text{пл. } [K] > 8,5. \quad (2)$$

Окружим K параллельным квадратом втрое большего размера с тем

¹⁾ См., например, Л. А. Люстерик, Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956, стр. 193.

²⁾ R. Rado, Some covering theorems, I; Proc. Lond. Math. Soc. 51, № 2 (1950).

же центром (рис. 2) и в его углах выделим открытые квадраты a_1, a_2, a_3, a_4 размером $\frac{1}{2}$. Ввиду (2) система $[K]$ налегает либо на три, либо на все четыре открытых квадрата a_1, a_2, a_3, a_4 ¹⁾. Рассмотрим эти два случая отдельно.

1) Пусть $[K]$ налегает только на три квадрата a_1, a_2, a_3 и пусть $\frac{1}{2} + x$ есть длина стороны квадрата K_1 — наибольшего среди квадратов системы $[K]$, налегающих на a_1 . Аналогично $\frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} + z$ — размеры квадратов K_2, K_3 , наибольших среди квадратов $[K]$, налегающих соответственно на a_2 и a_3 .

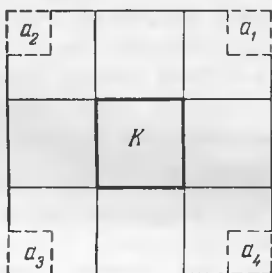


Рис. 2.

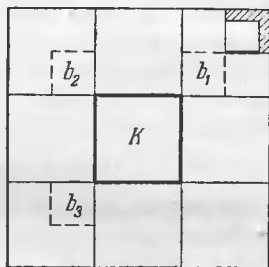


Рис. 3.

Из определения K_1 следует, что внутри a_1 есть заведомо не покрытая системой $[K]$ область, имеющая форму «уголка»; она заштрихована на рис. 3. Площадь этой области равна $\frac{1}{4} - x^2$. Аналогичное справедливо для K_2 и K_3 ; кроме того, целиком свободен от $[K]$ квадрат a_4 . Поэтому из (2) следует, что $\left(\frac{1}{4} - x^2\right) + \left(\frac{1}{4} - y^2\right) + \left(\frac{1}{4} - z^2\right) + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Наконец, ввиду максимальной K имеем $0 < x, y, z \leq \frac{1}{2}$.

Квадраты K_1, K_2, K_3 не имеют общих точек. Все квадраты исходной системы, имеющие общие точки с K_1 , лежат в области Q_1 , которая получается присоединением к K_1 пояса ширины 1. (Q_1 представляет собой квадрат размером $2,5 + x$.) Из того обстоятельства, что K_1, K_2, K_3 заведомо содержат квадраты b_1, b_2, b_3 , отмеченные на рис. 3, следует, что области Q_1, Q_2, Q_3 существенно перекрываются.

¹⁾ Система $[K]$ заключена внутри большого квадрата площадью 9, т. е. пл. $[K] \leq 9$. Если бы эта система не покрывала двух открытых квадратов стороной $\frac{1}{2}$ общей площадью $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}$, то ее площадь была бы меньше 8,5, что противоречит условию (2).

В частности, легко проследить, что покрытая $Q_1 + Q_2 + Q_3$ площадь не превосходит $(2,5 + x)^2 + (2,5 + y)^2 + (2,5 + z)^2 - 5$. Из сказанного следует, что доля, которую составляет площадь квадратов $K_1 + K_2 + K_3$, по отношению к площади, покрытой системами квадратов $[K_1 + K_2 + K_3]$ (т. е. всеми квадратами, имеющими общие точки хотя бы с одним из квадратов K_1, K_2, K_3), не меньше, чем число m , являющееся решением следующей задачи:

$$m = \min \frac{(0,5 + x)^2 + (0,5 + y)^2 + (0,5 + z)^2}{(2,5 + x)^2 + (2,5 + y)^2 + (2,5 + z)^2} = \min \frac{t + c + 0,75}{t + 5c + 13,75} \quad (3)$$

(где $t = x^2 + y^2 + z^2$, $c = x + y + z$) при условиях

$$0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

При каждом фиксированном $c > 0$ величина $\frac{t + c + 0,75}{t + 5c + 13,75}$ убывает вместе с t . Минимум величины $x^2 + y^2 + z^2$ при фиксированном $x + y + z$ достигается при $x = y = z$. Поэтому минимум (3) достаточно искать либо при $x = y = z$, $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$, либо при $t = \frac{1}{2}$. Налагая условия $x = y = z$, $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$, получаем:

$$m_1 = \min_{\frac{1}{\sqrt{6}} \leq x \leq \frac{1}{2}} \frac{3(0,5 + x)^2}{3(2,5 + x)^2 - 5} = \frac{3(0,5 + x)^2}{3(2,5 + x)^2 - 5} \Big|_{x = \frac{1}{\sqrt{6}}} \approx \frac{1}{8,23}.$$

Налагая условие $t = \frac{1}{2}$, мы должны искать $m_2 = \min \frac{c + 1,25}{5c + 14,25}$.

Для отыскания последнего минимума надо по возможности уменьшить $c = x + y + z$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$, $0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2}$.

Наименьшее значение $c = 1$; оно достигается, когда одна из величин x, y, z равна 0, а две другие равны $\frac{1}{2}$. Поэтому $m_2 = \frac{9}{77} \approx \frac{1}{8,55}$, и окончательно $m = m_2 > \frac{1}{8,6}$.

2) Перейдем к случаю, когда $[K]$ налагает на все четыре квадрата a_1, a_2, a_3, a_4 . Выбирая аналогично предыдущему возможно большие квадраты $[K_1], \dots, [K_4]$ размерами $(0,5 + x), (0,5 + y), (0,5 + z), (0,5 + u)$, мы получим систему неналегающих квадратов, причем площадь фигуры, покрытой $[K_1 + \dots + K_4]$, на этот раз будет не больше, чем $(2,5 + x)^2 + (2,5 + y)^2 + (2,5 + z)^2 + (2,5 + u)^2 - 9$. Поэтому доля, которую составляет площадь $K_1 + \dots + K_4$, по отношению к площади,

покрытой $[K_1 + \dots + K_4]$, не меньше, чем число m , являющееся решением следующей задачи:

$$m = \min \frac{t+c+1}{t+5c+16}$$

(где $t = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, $c = x + y + z + u$) при условиях

$$0 \leq x, y, z, u \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Для решения этой задачи, как и выше, достаточно рассмотреть две частные возможности: случай $x = y = z = u$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ и случай $t = \frac{1}{2}$. Первая возможность приводит к значению

$$m_1 = \min_{\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x \leq \frac{1}{2}} \frac{x^2 + x + 0,25}{x^2 + 5x + 4} = \frac{x^2 + x + 0,25}{x^2 + 5x + 4} \Big|_{x=\frac{1}{\sqrt{8}}} \approx \frac{1}{8,09}.$$

Вторая возможность приводит к значению $m_2 = \min \frac{c+1,5}{5c+16,5}$.

Для нахождения этого минимума надо по возможности уменьшить $c = x + y + z + u$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \frac{1}{2}$, $0 \leq x, y, z, u \leq \frac{1}{2}$. Наименьшее значение $c = 1$; оно достигается, когда две из величин x, y, z, u равны 0, а две другие равны $\frac{1}{2}$. Поэтому $m_2 = \frac{5}{43}$, и окончательно $m = m_2 = \frac{1}{8,6}$. Но так как точное равенство $t = \frac{1}{2}$ исключено условием (2), то и в этом случае искомая доля площади $> \frac{1}{8,6}$.

Итак, во всех случаях мы получаем такой набор неналегающих квадратов, что их площадь $S_1 > \frac{S}{8,6}$, где S — площадь, покрытая теми квадратами исходной системы, которые имеют общие точки с выбранными. Возможность повторения этой операции доказывает оценку (1).

3. Доказательство проблемы Радо для случая равных квадратов. Мы дадим доказательство утверждения Р. Радо для случая равных квадратов, существенно отличное от доказательства А. С. Соколина.

Будем считать, что все квадраты имеют размер 1, а стороны этих квадратов параллельны вертикальному и горизонтальному направлениям. Возьмем произвольный квадрат K и все другие квадраты, горизонтальные стороны которых отстоят на целое число единиц от прямых, на которых лежат горизонтальные стороны K . Выбранную так систему квадратов Ω будем двигать вверх или вниз как твердое целое, выбирая то

из этих двух направлений, при движении в котором покрытая всеми квадратами в целом площадь S не убывает¹⁾. Движение продолжаем до тех пор, пока горизонтальные стороны хотя бы одного из квадратов, оставшихся вне Ω , окажутся отстоящими на целое число единиц от прямых, на которых лежат горизонтальные стороны K . Тогда пополюем систему Ω , снова двигаем ее и т. д. — до тех пор, пока система Ω включит все квадраты. Затем повторим такие же «движения» в горизонтальном направлении.

Полученная система квадратов будет составлять часть правильной единичной решетки; многократно покрытые квадраты мы оставляем только в одном экземпляре. Во время всего построения площадь S разве лишь возрастала, а выбор систем неналегающих квадратов разве лишь сужался, так как старые налегания не терялись, новые могли появиться и часть квадратов могла быть отброшена.

Но квадраты полученной решетки распадаются на четыре группы, состоящие из неналегающих квадратов; хотя бы в одной из них площадь оставшихся квадратов $\geq \frac{S}{4}$. Те же квадраты в их исходных положениях решают поставленную задачу.

4. Проблема Радо в одном специальном случае. Рассмотрим случай, когда исходная система содержит квадраты только двух размеров, из которых один вдвое больше другого. Пусть длины сторон этих квадратов равны 1 и $\frac{1}{2}$. Движениями, аналогичными рассмотренным в п. 3, можно, не уменьшая S и не обогащая выбора систем неналегающих квадратов, добиться, чтобы параллельные стороны всех квадратов лежали на прямых, удаленных друг от друга на расстояния, кратные $\frac{1}{2}$. Опуская лишние квадраты, можно считать также, что нет квадратов, целиком покрытых другими квадратами нашей системы. В частности, каждый квадрат меньшего размера в новом положении будет ничем не покрыт и разве лишь прилегает к другим квадратам по сторонам или в вершинах.

Если теперь мысленно удалить все квадраты меньшего размера, то для оставшихся квадратов размера 1 можно продолжить движения, описанные в п. 3. Сделаем это, но теперь представим себе, что квадраты меньшего размера не были при этом удалены, а как бы являлись «резиновыми» и при движении больших квадратов в каждом из двух направлений некоторые из малых квадратов могли растянуться вдвое или сжаться до «прокладки» нулевой ширины. Каждой фигуре при всех ее деформациях мы продолжаем приписывать число, равное исходной

¹⁾ Такое направление всегда можно выбрать, так как скорость изменения S при движении Ω вверх или вниз имеет противоположные знаки. При движении вверх эта скорость равна $a - b$, где a — суммарная длина «верхнего фронта», а b — «нижнего фронта» границы Ω , не покрытой лежащими вне Ω квадратами.

площади этой фигуры. Если между двумя большими квадратами имеются упомянутые «прокладки», то эти квадраты не считаются налегающими. Не нарушая налеганий, можно затем расширить «прокладки», бесконечно узкие или сжатые в точку, сделав это за счет сужения соседних с ними больших квадратов. В результате мы придем к следующей картине.

Имеется произвольная система квадратов, составляющая часть правильной целочисленной решетки. Некоторые из них разбиты на части тем или иным из семи способов, изображенных на рис. 4.

Мы хотим поставить следующий вопрос, ответ на который неизвестен: *нельзя ли любую такую систему прямоугольных областей раскрасить в четыре цвета так, чтобы никакие две области, касающиеся по сторонам или в вершине, не были выкрашены одинаково?*



Рис. 4.

В случае положительного ответа на этот вопрос, очевидно, появляется возможность выбрать систему неналегающих квадратов с площадью $S_1 \geq \frac{S}{4}$ для любой системы квадратов размером 1 и $\frac{1}{2}$.

Тем же путем можно в случае системы квадратов размерами $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ решить задачу о выборе системы неналегающих квадратов с площадью $S_1 \geq \frac{S}{4}$, если окажется возможным раскрасить в четыре цвета любую карту из прямоугольников, обеспечивая различный цвет у прямоугольников, прилегающих по сторонам или в вершинах.

Напомним, что к весьма близкому вопросу сводится известная проблема четырех красок. Как показал П. Ангар¹⁾, для ее решения достаточно уметь красить карту из прямоугольных областей. При этом, в отличие от поставленного выше вопроса, требуется выкрасить и внешнее «море», но зато рассматриваются карты, в каждой вершине которых сходится не более трех прямоугольников.

¹⁾ P. Ungar, On diagrams representing maps, J. Lond. Math. Soc. 28, 3, № 111 (1953), стр. 336—342.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. В. И. Левин (Москва). Об одном функциональном уравнении.

Рассмотрим следующую задачу: найти все аналитические функции $f(x)$, удовлетворяющие условию

$$|f(x + iy)| = |f(x)| + |f(iy)|^4. \quad (1)$$

Равенство (1) означает, что функция $\rho(x, y) = |f(x + iy)|$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\rho(x, y) = \rho(x, 0) + \rho(0, y). \quad (2)$$

Полагая $\rho(x, 0) = \lambda(x)$, $\rho(0, y) = \mu(y)$, будем иметь:

$$\rho(x, y) = \lambda(x) + \mu(y). \quad (3)$$

Легко установить, что $\lambda(0) = \mu(0) = 0$. Функция $\ln |f(z)|$, как вещественная часть аналитической функции, должна быть гармонической и, следовательно,

$$\Delta \ln [\lambda(x) + \mu(y)] = 0,$$

т. е.

$$[\lambda''(x) + \mu''(y)][\lambda(x) + \mu(y)] = \lambda'^2(x) + \mu'^2(y). \quad (4)$$

При $y = 0$ из (4) получим уравнение

$$\lambda\lambda'' - \lambda'^2 + \beta''\lambda = \beta'^2,$$

где $\beta' = \mu'(0)$ и $\beta'' = \mu''(0)$; интегрируя его, находим:

$$\lambda'^2 = A\lambda^2 + 2\beta''\lambda - \beta'^2, \quad (5)$$

где A — произвольная постоянная. Аналогично имеем:

$$\mu'^2 = B\mu^2 + 2\alpha''\mu - \alpha'^2, \quad (6)$$

где B — произвольная постоянная, $\alpha' = \lambda'(0)$, $\alpha'' = \lambda''(0)$.

Полагая в соотношениях (5) и (6) $x = 0$, найдем $\alpha'^2 = -\beta'^2$, что, ввиду вещественности λ и μ означает, что $\alpha' = \beta' = 0$. Таким образом,

$$\lambda'^2 = A\lambda^2 + 2\beta''\lambda, \quad \mu'^2 = B\mu^2 + 2\alpha''\mu. \quad (7)$$

¹⁾ Эта задача, близкая к задаче 5 по высшей математике повышенной трудности (см. стр. 270 настоящего выпуска), может быть решена теми же методами. В настоящей заметке указано более прямое решение, не использующее разложение функции $f(z)$ в степенной ряд. (Прим. ред.)

Дифференцируя первое соотношение (7) и сокращая на λ' , находим:

$$2\lambda'' = 2A\lambda + 2\beta'',$$

откуда при $x=0$ получаем, что $\alpha'' \equiv \beta'' \equiv \gamma$ (где γ — произвольная постоянная). Таким образом,

$$\lambda'^2 = A\lambda^2 + 2\gamma\lambda, \quad \mu'^2 = B\mu^2 + 2\gamma\mu. \quad (8)$$

Подставляя выражения для λ'^2 и μ'^2 из равенств (8) в правую часть соотношения (4), находим:

$$\lambda'' + \mu'' = \frac{A\lambda^2 + B\mu^2}{\lambda + \mu} + 2\gamma. \quad (9)$$

Полагая здесь $y=0$ и $x=0$, получим:

$$\lambda'' = A\lambda + \gamma, \quad \mu'' = B\mu + \gamma. \quad (10)$$

Из равенств (9) и (10) следует, что $A + B = 0$.

Итак, функции $\lambda(x)$ и $\mu(y)$ являются решениями уравнений

$$\lambda'' = A\lambda + \gamma, \quad \mu'' = -A\mu + \gamma \quad (11)$$

с начальными условиями

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = 0, \quad \mu(0) = \mu'(0) = 0.$$

Предположим сначала, что $A = \omega^2 > 0$. Тогда

$$\lambda = C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x - \frac{\gamma}{\omega^2}, \quad \mu = D_1 \cos \omega y + D_2 \sin \omega y + \frac{\gamma}{\omega^2},$$

где $C_1 = \frac{\gamma}{\omega^2}$, $C_2 = 0$, $D_1 = -\frac{\gamma}{\omega^2}$, $D_2 = 0$, так что

$$\lambda = \frac{\gamma}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega x - 1), \quad \mu = \frac{\gamma}{\omega^2} (1 - \cos \omega y)$$

и

$$\rho(x, y) = \frac{\gamma}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega x - \cos \omega y). \quad (12)$$

Если $A = -\omega^2 < 0$, то из уравнений (11) аналогично найдем:

$$\rho(x, y) = \frac{\gamma}{\omega^2} (\operatorname{ch} \omega y - \cos \omega x). \quad (13)$$

Ввиду неотрицательности $\rho(x, y)$, в формулах (12) и (13) следует считать $\gamma \geq 0$.

Чтобы перейти от $\rho(x, y)$ к $f(x)$, положим в формулах (12) и (13) $y=0$ заменим x и z и умножим обе части каждой формулы $e^{i\varphi}$, где φ — произвольное действительное число. Мы найдем, что либо

$$f(z) = C \frac{\operatorname{ch} \omega z - 1}{\omega^2} = 2C \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\omega z}{2}}{\omega^2},$$

либо

$$f(x) = C \frac{1 - \cos \omega z}{\omega^2} = 2C \frac{\sin^2 \frac{\omega z}{2}}{\omega^2},$$

где $\omega \neq 0$ — произвольное действительное, а C — произвольное комплексное число ($C = \gamma e^{i\varphi}$). Оба эти решения в пределе при $\omega \rightarrow 0$ дают еще одно решение:

$$f(z) = \frac{1}{2} C z^2.$$

2. З. А. Скопец (Ярославль). Элементарное доказательство одной теоремы П. Эрдеша. Теорема Эрдеша читается так: *если расстояния от произвольной внутренней точки O треугольника до его вершин равны R_1, R_2, R_3 , а расстояния до сторон равны r_1, r_2, r_3 , то*

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3),$$

причем равенство достигается только для правильного треугольника и его центра.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Л. Фейеш-Тота «Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве»¹⁾. Предполагаемое нами доказательство является более кратким и не требует применения тригонометрии²⁾.

Докажем сначала, что если только точка O лежит внутри угла C треугольника ABC , то

$$R_3 \geq \frac{a}{c} r_2 + \frac{b}{c} r_1, \quad (1)$$

где a, b, c — стороны треугольника. Действительно, если из вершин A и B опустим на прямую OC перпендикуляры и их основания обозначим через A_1 и B_1 , то (см. рисунок)

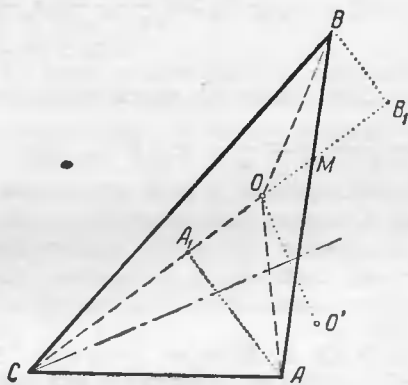
$$c = AM + BM \geq AA_1 + BB_1,$$

и поэтому

$$cR_3 \geq AA_1 \cdot R_3 + BB_1 \cdot R_3 = 2S_{\triangle AOC} + 2S_{\triangle BOC} = ar_1 + br_2,$$

¹⁾ М., Физматгиз, 1958, стр. 32—35.

²⁾ Аналогичное доказательство приведено в статье Н. G. Eggleston, A triangle inequality (Mathematical Gazette, 1958 г., № 339, стр. 54—55). Настоящая заметка получена редакцией до появления в печати этой статьи. (Ред.)



откуда и вытекает неравенство (1), причем знак равенства имеет место для точек O , расположенных на луче, перпендикулярном к AB .

Если точку O отразить относительно биссектрисы угла C , то отраженная точка O' останется внутри угла C ; записав для нее неравенство (1), получим:

$$R_3 \geq \frac{b}{c} r_1 + \frac{a}{c} r_2. \quad (2a)$$

Аналогично этому имеем:

$$R_1 \geq \frac{b}{a} r_3 + \frac{c}{a} r_2 \quad (2b), \quad R_2 \geq \frac{a}{b} r_3 + \frac{c}{b} r_1. \quad (2в)$$

Складывая почленно последние три неравенства и учитывая, что, например, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b-c)^2}{bc} + 2 \geq 2$, находим:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) r_1 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) r_2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) r_3 \geq \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, если $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, т. е. если $a = b = c$ и треугольник является равносторонним, и если огражденная точка O' попадает на проведенную из C высоту треугольника, и аналогично для точек, полученных из O отражением от двух других биссектрис треугольника, что равносильно требованию совпадения точки O с центром равностороннего треугольника. Этим теорема доказана полностью.

3. Э. Э. Шноль (Москва). Замечания к работе Э. Э. Балаша «Об одном разложении в ряд логарифмической функции»¹⁾. Основной результат работы Э. Э. Балаша²⁾ составляет формула

$$\ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{1}{P_{k-1} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \cdot P_k \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^3}.$$

Покажем, что она вытекает из общей теории ортогональных многочленов³⁾.

Эта формула может быть переписана в виде

$$\ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{1}{P_{k-1}(z) P_k(z)}. \quad (1)$$

¹⁾ Настоящая заметка написана на основе обсуждения результата Э. Э. Балаша с В. Б. Уваровым.

²⁾ Работа напечатана на стр. 133—140 настоящего выпуска «Математического просвещения». (Прим. ред.)

³⁾ Формула (16) на стр. 139.

⁴⁾ См., например, Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948.

Имеющиеся здесь полиномы Лежандра $P_k(z)$ — это простейшие многочлены, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$, и стоящий в правой части (1) ряд сходится для всех комплексных z вне этого отрезка.

Пусть теперь на отрезке $[-1, 1]$ заданы многочлены $F_n(x)$, ортогональные с весом $p(x)$, т. е. такие, что

$$\int_{-1}^1 F_n(x) F_m(x) p(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m. \quad (2)$$

Мы предположим, что $\int_{-1}^1 p dx = 1$ и что старшие коэффициенты многочленов $F_n(x)$ равны 1.

Многочлены $F_n(x)$ могут быть получены из рекуррентного соотношения

$$x f_n = f_{n+1} + \alpha_n f_n + \beta_n f_{n-1}, \quad (3)$$

если положить $f_{-1} = 0$, $f_0 = 1$. При другом выборе начальных функций, именно $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, получается другая система решений уравнения (3). Мы обозначим эти многочлены (в соответствии с их степенью) $G_n(x) = f_{n+1}(x)$. Легко показать, что

$$G_{n-1}(x) = \int_{-1}^1 \frac{F_n(x) - F_n(\xi)}{x - \xi} p(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Нужная нам теорема состоит в следующем: при всяком комплексном z , не принадлежащем отрезку $[-1, 1]$:

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{z - x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n-1}(z)}{F_n(z)}. \quad (5)$$

Отметим, что стоящие в правой части рациональные функции есть подходящие дроби разложения $\varphi(z)$ в непрерывную дробь.

Очень грубо можно пояснить эту теорему так. Многочлены $F_n(x)$ имеют нули только на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому при больших n они вне этого отрезка велики по сравнению с их величиной на этом отрезке. Отсюда имеем:

$$\frac{G_{n-1}(z)}{F_n(z)} = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{F_n(x)}{F_n(z)}\right) \frac{p(x)}{z - x} dx \rightarrow \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{z - x} dx \quad (6)$$

[ср. с теоремой 1 работы Э. Э. Балаша¹⁾].

Из (5) совсем нетрудно получить (аналогично тому, как это сделал Э. Э. Балаш) разложение логарифмической функции в ряд. Именно,

¹⁾ Стр. 136 настоящего выпуска.

из (5) следует:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{G_n(z)}{F_{n+1}(z)} - \frac{G_{n-1}(z)}{F_n(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n G_n - G_{n-1} F_{n+1}}{F_{n+1} F_n}. \quad (7)$$

Из рекуррентных формул (3) легко усмотреть, что числители членов последнего ряда постоянны, так как

$$-F_{n+1} G_{n-1} + F_n G_n = \beta_n (-F_n G_{n-2} + F_{n-1} G_{n-1}). \quad (8)$$

Заметим теперь, что [в силу ортогональности $F_n(x)$]

$$\beta_n = \left[\int_{-1}^1 x F_n(x) F_{n-1}(x) p(x) dx \right] : \left[\int_{-1}^1 F_{n-1}^2(x) p(x) dx \right]. \quad (9)$$

Учитывая (3) и (2), здесь в делимом можно вместо $x F_{n-1}(x)$ поставить $F_n(x)$. Тогда, обозначив $\int_{-1}^1 F_n^2(x) p(x) dx$ через Δ_n^2 , будем иметь:

$$\beta_n = \frac{\Delta_n^2}{\Delta_{n-1}^2}. \quad (10)$$

Последовательно применяя (8), получим:

$$F_n G_n - G_{n-1} F_{n+1} = \frac{\Delta_n^2}{\Delta_0^2} (F_0 G_0 - G_{-1} F_1) = \Delta_n^2. \quad (11)$$

Окончательно формула (7) примет вид

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{z-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n^2}{F_n(z) F_{n+1}(z)}. \quad (12)$$

Чтобы получить отсюда формулу (1), нужно переписать этот ряд для случая, когда старшие коэффициенты c_n ортогональных многочленов $P_n(x)$ произвольны.

Положив $P_n(x) = c_n F_n(x)$ и $\delta_n^2 = c_n^2 \Delta_n^2$, мы получим:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n^2 c_{n+1}}{c_n P_n(z) P_{n+1}(z)}. \quad (13)$$

Для многочленов Лежандра $\delta_n^2 = \frac{2}{2n+1}$, $c_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, $\delta_n^2 \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2}{n+1}$, и

$$\varphi(z) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{z-x} = \ln \frac{z+1}{z-1} \quad [\text{так как } p(x) \equiv 1].$$

Подставив это выражение в (13), получим формулу (1).

III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

О ФОРМУЛЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

И. М. Гельфанд

(Москва)

Формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{ixt} dt, \quad (1)$$

где

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx, \quad (2)$$

находит самое широкое применение во многих вопросах математического анализа и его приложений. Однако строгое доказательство этой формулы даже при достаточно жестких ограничениях на функцию $f(x)$ основывается обычно на довольно тонких рассуждениях. В противоположность этому изложенный здесь вариант вывода формулы (1) не требует по существу никаких вспомогательных средств, кроме формулы для коэффициентов Фурье и теоремы о сходимости ряда Фурье.

1. Мы начнем с одного обобщения понятия периодической функции. Функцию $f_t(x)$ вещественного переменного x мы будем называть *условно-периодической* (с параметром t), если

$$f_t(x+1) = e^{it} f_t(x). \quad (3)$$

При $t=0$ условно-периодические функции переходят в обыкновенные *периодические* функции [$f_0(x+1) = f_0(x)$]; при $t=\pi$ эти функции можно назвать *антипериодическими* [$f_\pi(x+1) = -f_\pi(x)$].

Примером условно-периодической функции может служить сумма

$$f_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) e^{-int}, \quad (4)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, такая, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)| \quad (5)$$

на отрезке $[0, 1]$ равномерно сходится; последнее условие обеспечивает равномерную и абсолютную сходимость ряда (4). В самом деле,

$$\begin{aligned} f_t(x+1) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n+1) e^{-int} = \\ &= e^{it} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n+1) e^{-i(n+1)t} = e^{it} f_t(x). \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ такова, что кроме (4) равномерно сходятся на отрезке $[0, 1]$ также и ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(x+n), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f'(x+n)|, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f''(x+n)|, \quad (6)$$

то абсолютно и равномерно сходится не только ряд (4), но и ряды, полученные почленным дифференцированием (4) по x и по t :

$$\begin{aligned} f'_t(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(x+n) e^{-int}, \\ f''_t(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f''(x+n) e^{-int}, \\ \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f(x+n) e^{-int}; \end{aligned}$$

таким образом, в этом случае функция (4) дифференцируема по x (по крайней мере, два раза) и по t . Функции $f(x)$, для которых равномерно сходятся ряды (5) и (6), мы назовем *правильно убывающими* и в дальнейшем ограничимся лишь подобными функциями [хотя приведенный здесь вывод формулы Фурье сохраняет силу и при менее ограничительных условиях, наложенных на функцию $f(x)$]. К числу правильно убывающих относятся, например, дважды дифференцируемые функции $f(x)$, такие, что при $|x| \rightarrow \infty$

$$|f(x)| = O(x^{\frac{1}{2+\varepsilon}}), \quad |f'(x)| = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right), \quad |f''(x)| = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$$

($\varepsilon > 0$).

2. Основную роль в дальнейшем играет то обстоятельство, что *каждая* (во всяком случае, *правильно убывающая*) *функция может быть разложена по условно периодическим*, т. е. представлена в виде интеграла

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_t(x) dt, \quad (7)$$

где $f_t(x)$ — дифференцируемые по x и по t условно-периодические функции с параметром t : $f_t(x+1) = e^{it} f(x)$.

Доказательство этого утверждения следует из того, что если функции $f_t(x)$ в соотношении (7) определены формулой (4), то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_t(x) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(x+n) \int_0^{2\pi} e^{-int} dt] = f(x).$$

Таким образом, формулу (2) можно рассматривать как «формулу обращения» для даваемого формулой (4) разложения (правильно убывающей) функции по условно-периодическим.

Заметим еще, что для разложения (4) справедлива «формула Планшереля»:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f_t(x)|^2 dt dx; \quad (8)$$

она следует из того, что согласно (4), $f(x+n)$ суть «коэффициенты Фурье» функции $f_t(x)$ и, следовательно, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_0^{2\pi} |f_t(x)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)|^2. \quad (9)$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_t(x)|^2 dt dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+n)|^2 dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

т. е. равенство (8).

3. Воспользуемся теперь тем, что функции $f_t(x) e^{-itx}$ являются периодическими (с периодом 1) и, следовательно, могут быть разложены в ряд Фурье:

$$e^{-itx} f_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{2\pi i n x}; \quad (10)$$

отсюда следует, что

$$f_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{ix(1+2\pi n)}. \quad (11)$$

Коэффициенты $a_n(t)$ ряда (10) вычисляются по формулам Фурье

$$a_n(t) = \int_0^1 f_t(x) e^{-ix(1+2\pi n)} dx. \quad (12)$$

Подставим в равенство (11) вместо $f_t(x)$ ряд (4) и изменим порядок интегрирования и суммирования [что возможно в силу правильного убывания функции $f(x)$]. Мы получим:

$$a_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+m) e^{-i(x+m)(t+2\pi n)} dx \quad (13)$$

(ради симметрии мы ввели под знак интеграла множитель $e^{-2\pi i n m}$, равный 1). Если положить в равенстве (13) $x+m=y$, то оно примет вид

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} f(y) e^{-iy(t+2\pi n)} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy(t+2\pi n)} dy = \varphi(t+2\pi n). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, $a_n(t) = \varphi(t+2\pi n)$, где $\varphi(t)$ — преобразование Фурье (2) функции $f(x)$.

4. Подставим теперь выражение (12) для условно периодических функций $f_t(x)$ в интеграл (7). Учитывая формулу (14), мы получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{ix(t+2\pi n)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t+2\pi n) e^{ix(t+2\pi n)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(t+2\pi n) e^{ix(t+2\pi n)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+2\pi} \varphi(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{ixt} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

[возможность изменения порядка интегрирования и суммирования вытекает из абсолютной сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$]. Тем самым доказательство формулы преобразования Фурье (1) закончено.

5. Докажем теперь формулу Планшереля

$$\int_0^1 |f_t(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt. \quad (16)$$

Для этого заметим, что в силу равенства Парсеваля имеет место соотношение

$$\int_0^t |f_t(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(t)|^2. \quad (17)$$

Проинтегрируем равенство (17) по t от 0 до 2π (это возможно, так как сходящиеся к непрерывной функции ряды, составленные из положительных функций, равномерно сходятся). Мы получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f_t(x)|^2 dx dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |a_n(t)|^2 dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\varphi(t + 2\pi n)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\varphi(t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Из сравнения (18) и (8) сразу следует (16).

Настоящее доказательство заимствовано из работы, посвященной некоторым более общим вопросам, представляющим интерес для математики и для физики (поведение электрона в периодическом поле)¹⁾. Оно тесно связано с доказательством формул Фурье для коммутативных локально компактных абелевых групп, принадлежащим А. Вейлю²⁾.

¹⁾ См. И. М. Гельфанд, Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами, Доклады Академии наук СССР 73, № 1 (1950), стр. 1117—1120.

²⁾ Ср. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950, стр. 129—131.

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

В 1917 г. японский геометр Какейя (Takeya) поместил в научном журнале Токийского университета большую статью, посвященную геометрическим задачам на максимум и минимум, в первую очередь, связанным с выпуклыми фигурами¹⁾. Среди других в этой статье фигурировала и следующая задача: **указать плоскую фигуру наименьшей возможной площади, внутри которой можно так двигать отрезок длины 1, чтобы он повернулся на угол в 180°** . Какейя не решил этой задачи; он только высказал предположение о том, что подобной фигурой является равносторонний треугольник высоты 1, площадь которого, очевидно, равна $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57735 \dots$

По первому впечатлению задача, поставленная Какейей, не казалась ни очень интересной, ни очень трудной, и ничто не предвещало ей долгой истории. И в самом деле, всего через три года после постановки задачи ее почти решил шведский математик Паль (J. Pál). А именно, Паль, в соответствии с предположением, сделанным Какейей, показал, **что из всех выпуклых фигур, внутри которых можно повернуть на 180° отрезок длины 1, наименьшую площадь имеет равносторонний треугольник высоты 1²⁾**. Однако, этот результат не исчерпывал всего, что можно было сказать по поводу поставленной проблемы — статья Палья кончалась несколько недоуменным замечанием о том, что если откажется от требования выпуклости фигуры, то треугольник можно еще уменьшить (например, вырезав в нем маленькую лунку вблизи вершины), так что вопрос о том, какая же из всех (не обязательно выпуклых!) плоских фигур, внутри которых можно повернуть отрезок длины 1, имеет самую малую площадь, остается открытым.

Работа Палья только увеличила интерес к задаче Какейя — она выяснила, что решение этой задачи доставляется не рав-

¹⁾ Ограниченная плоская фигура называется **выпуклой**, если через каждую точку ее границы можно провести прямую, не содержащую внутренних точек фигуры (т. е. если граница фигуры не содержит «впадин»).

²⁾ См. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, М.-Л., 1951, задача 70.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г. Б. Гуревич

(Москва)

1. Теория площадей многоугольников в «Началах» Евклида основывается на двух положениях: 1) конгруэнтные многоугольники имеют одинаковую площадь («и совмещающиеся друг с другом равны между собой», акс. 7); 2) площади многоугольников обладают всеми теми свойствами величин, которые перечислены в остальных аксиомах: «равные одному и тому же равны между собой» (акс. 1¹); «и если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны» (акс. 2); «и если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны» (акс. 3); «и целое больше части» (акс. 8). Отсюда следует, что два многоугольника, состоящих из попарно конгруэнтных многоугольников (*равносоставленные* многоугольники), имеют одинаковую площадь, и что то же справедливо для двух многоугольников, которые могут быть дополнены попарно конгруэнтными многоугольниками до *равносоставленных* (*равнодополнимые* многоугольники). Исходя из этого, Евклид и строит всю теорию площадей многоугольников; с не очень существенными изменениями она воспроизводится в школьных учебниках геометрии.

Современное аксиоматическое построение геометрии избегает такого рода слишком общих допущений, как вышеупомянутые аксиомы Евклида. В теории измерения отрезков их вполне заменяют специально сформулированные аксиомы о конгруэнтных отрезках [по Гильберту — аксиомы III₁, III₂, III₃¹]. Уже в конце прошлого века возник вопрос о том, является ли необходимым для теории измерения площадей многоугольников введение новых аксиом, эквивалентных указанным выше аксиомам Евклида. Отрицательный ответ на этот вопрос был дан Гильбертом в 1899 г. («Основания геометрии», гл. IV); при этом оказалось возможным обойтись даже без ссылок на аксиомы непрерывности²).

Однако доказательство Гильберта не является вполне исчерпывающим; как указывает П. К. Рашевский в примечаниях к русскому

¹) См. статью П. К. Рашевского в настоящем выпуске «Математического просвещения», стр. 81. (Ред.)

²) До Гильберта аналогичный результат был получен С. О. Шатуновским (1894); см. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. II, Одесса, 1907, стр. 545—547.

переводу «Оснований геометрии» (примечание 51)¹⁾, Гильберт становится здесь на некоторую дуалистическую точку зрения: доказательства являются вполне строгими лишь по отношению к понятиям конгруэнтности; в тех же их пунктах, где приходится рассматривать взаимное расположение частей фигур, допускаются ссылки на наглядность, строгие выводы на основе аксиом порядка не даются. Восполнение этого пробела потребовало бы очень много труда и сделало бы все рассуждения чрезвычайно громоздкими.

В предлагаемой заметке дан новый вывод результата Гильберта, в котором удастся избежать указанного недостатка. При этом для упрощения изложения мы будем опираться, кроме первых четырех групп аксиом Гильберта, также и на аксиому Архимеда; это позволит, как известно, считать обоснованным измерением отрезков и углов, а также введение декартовых координат точки.

На указании пути мы получим также и доказательство теоремы Жордана для многоугольников; известные в литературе ее доказательства весьма сложны²⁾.

В дальнейшем рассматриваются только такие многоугольники, все вершины которых лежат в одной плоскости. Понятие площади вводится лишь для простых многоугольников; многоугольник называется простым, если никакие две его стороны не имеют общих точек, каждая вершина служит концом только для двух сторон многоугольника и ни одна из его вершин не принадлежит стороне (сторона многоугольника есть открытый отрезок без концов). Многоугольники на рис. 1 и 2 — простые, на рис. 3, 4 и 5 — не простые.

2. Нам предстоит установить возможность измерения многоугольников, т. е. показать, что каждому простому многоугольнику можно отнести положительное действительное число, называемое его *площадью*, и притом так, чтобы были выполнены следующие три требования:

1° *конгруэнтные многоугольники имеют равные площади*; иначе говоря, площадь многоугольника есть инвариант движений;

2° *площадь суммы P двух многоугольников P_1 , P_2 (рис. 6) равна сумме их площадей* (точное определение суммы двух многоугольников будет дано ниже в п. 11);

3° *квадрат, сторона которого равна единице длины, имеет площадь, равную 1.*

¹⁾ Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, стр. 448—449.

²⁾ См., например, примечание 15 П. К. Рашевского к «Основаниям геометрии» Д. Гильберта, там же, стр. 409—419; Kerékjártó, Les fondements de la géométrie, I, 1955 (стр. 31—44); W. Graeb, Der Jordansche Kurvensatz in der affinen Geometrie, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Math.-Phys., ser. A, 181 (1955), стр. 176—192 (в указанных статьях доказательство проводится на основе одних лишь аксиом инцидентности и порядка).

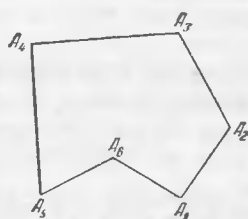


Рис. 1.

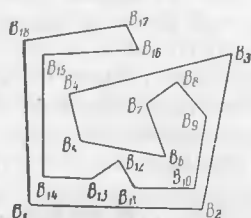


Рис. 2.

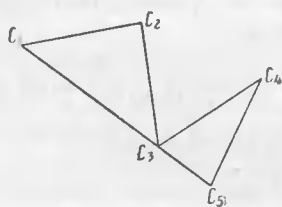


Рис. 3.

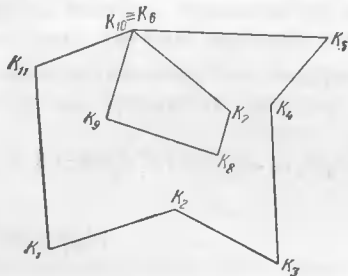


Рис. 4.

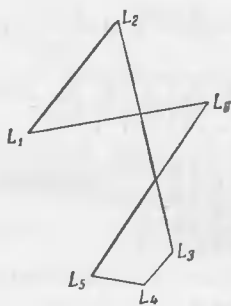


Рис. 5.

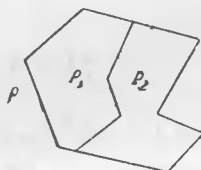


Рис. 6.

Из требования 2° следует, как легко показать, справедливость для площадей многоугольников аксиом 2, 3 и 8 Евклида; для аксиомы 1 то же вытекает из самого определения площади.

С указанной выше целью введем прежде всего понятия ориентированного многоугольника и его характеристики.

Многоугольник называется *ориентированным*, если указан порядок обхода его вершин; при этом начинать можно, конечно, с любой вершины. Ориентированный многоугольник мы будем обозначать одной буквой со стрелкой наверху; таким образом, мы будем писать:

$$\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n = A_2 A_3 \dots A_n A_1 = A_3 A_4 \dots A_n A_1 A_2 = \dots$$

Для всякого простого многоугольника, очевидно, возможны две (и только две) противоположные друг другу ориентации.

Пусть в плоскости ориентированного n -угольника $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ выбрана произвольная система декартовых прямоугольных координат; тогда его вершины получают координаты: $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Характеристикой ориентированного многоугольника \vec{P} (относительно данной системы координат) мы назовем число

$$[\vec{P}] = [A_1 A_2 \dots A_n] = (A_1 A_2) + (A_2 A_3) + \dots + (A_{n-1} A_n) + (A_n A_1), \quad (1)$$

где

$$(A_i A_j) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Легко видеть, что $(A_i A_j) = -(A_j A_i)$; поэтому при замене ориентации многоугольника на противоположную его характеристика меняет только знак.

Пример I. Характеристика треугольника $A_1 A_2 A_3$, где $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, будет равна

$$[A_1 A_2 A_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},$$

или

$$[A_1 A_2 A_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что

$$(A_i A_j) = [OA_i A_j] \quad (4)$$

(O — начало координат).

Если $A_1(0, 0)$, $A_2(b, 0)$, $A_3(x_3, h)$ ($b > 0$, $h > 0$, рис. 7), то

$$[A_1 A_2 A_3] = (A_2 A_3) = \begin{vmatrix} b & 0 \\ x_3 & h \end{vmatrix},$$

т. е.

$$[A_1 A_2 A_3] = bh. \quad (5)$$

Пример II. Даны точки $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(1, 1)$, $A_4(0, 1)$. Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ имеет сторону, равную единице длины; как легко подсчитать, его характеристика

$$[A_1A_2A_3A_4]=2. \quad (6)$$

Пусть прямая a проходит через точки A_1 и A_2 ; если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, то в силу (3) уравнение прямой a может быть записано так:

$$[A_1A_2M]=0 \quad (7)$$

[ибо левая часть равенства (7) линейна относительно координат точки M и обращается в нуль, когда M совпадает с A_1 или с A_2].

Если три точки A_1, A_2, A_3 расположены на одной прямой, то по (7) характеристика $[A_1A_2A_3]=0$, т. е. $(A_1A_2) + (A_2A_3) = (A_1A_3)$; если и точка A_4 лежит на той же прямой, то из последнего равенства следует: $(A_1A_2) + (A_2A_3) + (A_3A_4) = (A_1A_3) + (A_3A_4) = (A_1A_4)$ и т. д. Итак, если точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ лежат на одной прямой, то

$$(A_1A_2) + (A_2A_3) + (A_3A_4) + \dots + (A_{n-1}A_n) = (A_1A_n). \quad (8)$$

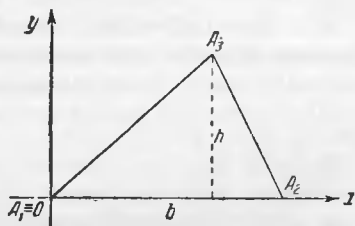


Рис. 7.

3. Выясним теперь, как изменится характеристика ориентированного многоугольника, если преобразовать систему координат¹⁾. При параллельном перенесении осей координат

$$x = x' + p, \quad y = y' + q$$

имеем:

$$(A_iA_j) = \left| \begin{matrix} x'_i + p & y'_i + q \\ x'_j + p & y'_j + q \end{matrix} \right| = (A_iA_j)' + p(y'_j - y'_i) + q(x'_i - x'_j)$$

(штрихом отмечены координаты и характеристики относительно новой системы координат);

$$[\vec{P}] = [\vec{P}]' + p(y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \dots + y_n - y_{n-1} + y_1 - y_n) + q(x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{n-1} - x_n + x_n - x_1),$$

т. е. $[\vec{P}] = [\vec{P}]'$. При повороте осей координат

$$x = ax' - by', \quad y = bx' + ay' \quad (a^2 + b^2 = 1) \quad (8a)$$

¹⁾ Приведенные ниже формулы для преобразования координат могут быть выведены без использования тригонометрических функций угла, если исходить из формулы для расстояния между двумя точками, заданными их координатами.

получим:

$$(A_i A_j) = \begin{vmatrix} ax'_i - by'_j & bx'_i + ay'_j \\ ax'_j - by'_i & bx'_j + ay'_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ x'_j & y'_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = (A_i A_j)',$$

так что характеристика ориентированного многоугольника $[\vec{P}]$ снова останется неизменной.

Если, не изменяя оси y , мы изменим направление оси x на противоположное, то мы будем иметь:

$$x = -x', \quad y = y', \quad (9)$$

откуда очевидным образом следует: $[\vec{P}] = -[\vec{P}']$

Так как всякое преобразование координат есть произведение указанного рода преобразований, то мы приходим к таким выводам:

при преобразовании координат в плоскости характеристики ориентированных многоугольников, расположенных в этой плоскости, или все остаются неизменными или же все умножаются на -1 ; абсолютная величина характеристики многоугольника не зависит от выбора системы декартовых координат.

Если во всём пространстве произведено движение S , то мы можем подвергнуть тому же преобразованию S и систему координат, вследствие чего координаты вершин многоугольника сохранят свои значения. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Если два многоугольника конгруэнтны, то их характеристики равны по абсолютной величине.*

Формула (6) в примере II (п. 2) показывает нам теперь, что для любого квадрата, сторона которого равна единице длины, характеристика имеет значение ± 2 .

4. Введенное выше понятие характеристики многоугольника позволит нам задать и *ориентацию плоскости*, не прибегая к наглядным представлениям, связанным с движением часовых стрелок.

Прямая a называется *ориентированной* (направленной), если на ней установлен порядок следования точек. Как известно¹⁾, основываясь на аксиомах порядка, можно показать, что ориентация прямой a определится, если для двух ее точек A_1, A_2 мы укажем, которая из них следует за другой.

В одной из тех полуплоскостей, на которые прямая a делит плоскость, левая часть уравнения (7) этой прямой положительна, а в другой — отрицательна²⁾. Ту из этих полуплоскостей, в которой

$$[A_1 A_2 M] > 0, \quad (10)$$

¹⁾ См., например, Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948, примечание 11 (стр. 405—406).

²⁾ Там же, стр. 443.

назовем *левой полуплоскостью* относительно ориентированной прямой, а, ту, в которой

$$[A_1 A_2 M] < 0, \quad (11)$$

— *правой полуплоскостью*. При изменении ориентации прямой на противоположную в формулах (10), (11) точки A_1, A_2 поменяются местами, так как левая полуплоскость станет правой, а правая — левой.

Как легко проверить, при таком условии положительное направление оси x идет в правую относительно оси y полуплоскость; в таком случае говорят, что *система координат правая*.

Плоскость, в которой для каждой ориентированной прямой указаны левая и правая стороны, называется *ориентированной*. Согласно вышеизложенному, ориентация плоскости будет установлена, если для одной ориентированной прямой (например, для оси y) указать левую и правую полуплоскости.

При параллельном перенесении осей координат и при их повороте характеристики ориентированных треугольников не изменяют своих значений (п. 3) и ориентация плоскости остается той же; при преобразовании координат (9) эти характеристики изменяют знак, так что ориентация плоскости заменится на противоположную. В дальнейшем мы будем считать ориентацию плоскости многоугольника зафиксированной; тогда допустимыми будут только правые системы координат, и из указанных в п. 3 преобразований координат мы сможем применять только параллельные перенесения осей и преобразования (8а).

Угол $\angle(h, k)$ называется *ориентированным*, если указано, какая из его сторон (h, k) является первой и какая — второй. В ориентированной плоскости мера ориентированного угла имеет знак: если обычная мера неориентированного угла $\angle(h, k)$ равна α , где $\alpha < \pi$, то мера ориентированного угла $\angle(h, k)$ также равна α , если луч k расположен слева от той прямой, часть которой составляет луч h ; в противном случае та же мера равна $-\alpha$. В силу этого $\angle(Ox, Oy) = \frac{\pi}{2}$,

а $\angle(Oy, Ox) = -\frac{\pi}{2}$. «Сверхтупые» углы, у которых обычная мера угла больше π , в дальнейшем встречаться не будут.

Меру ориентированного угла $\angle(h, k)$ мы будем обозначать так: о. м. (h, k) . Как доказывается в теории измерения ориентированных углов, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{о. м. } (h_1, h_2) + \text{о. м. } (h_2, h_3) + \dots + \text{о. м. } (h_{n-1}, h_n) = \\ = \text{о. м. } (h_1, h_n) + 2k\pi \end{aligned} \quad (12)$$

(все лучи h_1, h_2, \dots, h_n исходят из одной точки, k — целое число).

Тригонометрические функции произвольного ориентированного угла и полярные координаты $[r, \varphi]$ точки могут быть теперь введены обычным образом. Пусть точки A_1 и A_2 имеют соответственно декартовы координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ; их полярные координаты обозначим через $[r_1, \varphi_1]$ и $[r_2, \varphi_2]$. В силу равенств $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, мы

найдем, что

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (13)$$

и что [см. (2)] характеристика

$$[OA_1 A_2] = (A_1 A_2) = r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (14)$$

Учитывая результат (5) примера 1 в п. 2 и формулу (4), видим, что характеристика многоугольника $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ может быть определена также и нижеследующим образом: выберем в плоскости многоугольника P произвольную точку O ; для каждого из треугольников $OA_1 A_2, OA_2 A_3, \dots, OA_{n-1} A_n, OA_n A_1$ найдем произведение любой из его сторон на соответствующую высоту и возьмем его со знаком «плюс», если точка O лежит слева от стороны многоугольника, и со знаком «минус» — в противном случае. Характеристикой многоугольника \vec{P} называется сумма всех полученных таким образом чисел. Из доказанного в п. 3 следует, что определенная так характеристика не зависит от выбора точки O .

5. Пусть в плоскости даны точка B и направленный отрезок (вектор) $A_1 A_2$; меру ориентированного угла (BA_1, BA_2) мы будем называть *углом отрезка $A_1 A_2$ относительно точки B* и обозначать через $\Delta(B, A_1 A_2)$. Если точка B принадлежит отрезку $A_1 A_2$, то по определению считаем, что $\Delta(B, A_1 A_2) = \pi$. В силу указанных соглашений, $-\pi < \Delta(B, A_1 A_2) \leq \pi$, так что число $\Delta(B, A_1 A_2)$, ввиду (13) и (14), однозначно определится из равенств:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta(B, A_1 A_2) &= \frac{[B, A_1 A_2]}{r_1 r_2}, \\ \cos \Delta(B, A_1 A_2) &= \frac{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{r_1 r_2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $B(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$; r_1, r_2 — длины отрезков BA_1, BA_2 .

Углом ориентированного многоугольника $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ относительно точки B назовем число

$$\Delta(B, \vec{P}) = \Delta(B, A_1 A_2) + \Delta(B, A_2 A_3) + \dots + \Delta(B, A_{n-1} A_n) + \Delta(B, A_n A_1);$$

в силу (12)

$$\Delta(B, \vec{P}) = 2k\pi, \quad (16)$$

где k — целое число.

6. Для дальнейшего важно установить, как изменяется число $\Delta(B, A_1 A_2)$ при движении точки B вдоль ориентированной прямой a (т. е. когда координаты точки B принимают последовательно монотонно изменяющиеся значения). При этом мы будем применять следующую терминологию: если прямая a пересекает отрезок $A_1 A_2$ во внутренней его точке или если она проходит через один из концов отрезка,

то мы будем говорить, что имеется *положительное пересечение*, когда при движении по направлению прямой a мы в точке K ее пересечения с прямой A_1A_2 переходим с левой стороны прямой A_1A_2 на правую (рис. 8), и *отрицательное* — в противном случае (рис. 9).

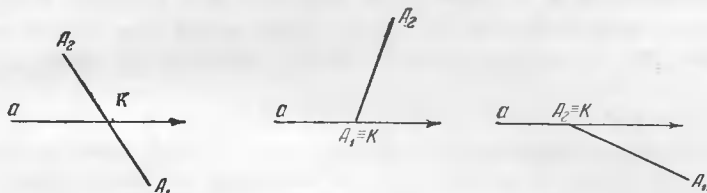


Рис. 8.

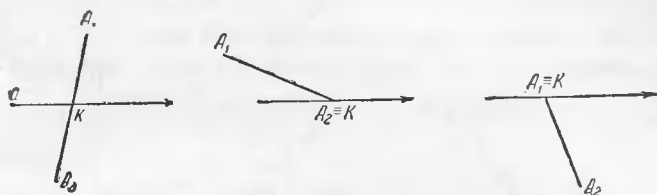


Рис. 9.

При положительном пересечении точка A_1 лежит справа от прямой a или на ней, точка A_2 — слева от той же прямой или на ней; при отрицательном пересечении имеем обратные соотношения. Эти утверждения легко подтвердить аналитически с помощью формул (10) и (11), приняв прямую A_1A_2 за ось u , точку K — за начало координат.

Основываясь на формулах (15), приходим к следующему выводу: если точка B движется вдоль ориентированной прямой a по ее направлению, то число $\Delta(B, A_1A_2)$ изменяется непрерывно за исключением лишь следующих трех случаев:

1) если прямая a пересекает отрезок A_1A_2 во внутренней его точке K , то число $\Delta(B, A_1A_2)$ изменяется в точке K скачком от $+\pi$ к $-\pi$ при положительном пересечении и от $-\pi$ к $+\pi$ при отрицательном пересечении [так как по (15) $\cos \Delta(B, A_1A_2)$ изменяется при этом непрерывно, а $\sin \Delta(B, A_1A_2)$ меняет знак с « $+$ » на « $-$ » в первом случае, с « $-$ » на « $+$ » во втором случае];

2) если прямая a проходит через один из концов отрезка A_1A_2 , то в этом конце число $\Delta(B, A_1A_2)$ уменьшается (увеличивается) скачком на π при положительном (отрицательном) пересечении, так как здесь меняют знак как $\sin \Delta(B, A_1A_2)$, так и $\cos \Delta(B, A_1A_2)$ [это легко подтвердить аналитически на основе формул (15), если мы выберем оси координат так же, как и выше];

3) если отрезок A_1A_2 лежит на прямой a , то для точек B , лежащих вне отрезка A_1A_2 , число $\Delta(B, A_1A_2) = 0$, а для точек B , расположенных внутри него, $\Delta(B, A_1A_2) = \pi$.

7. Точки, лежащие на одной из сторон многоугольника P или совпадающие с одной из его вершин, мы будем называть *граничными точками* многоугольника P .

Пусть на прямой a (или на луче h) имеются граничные точки многоугольника $P = A_1 A_2 \dots A_n$; тогда говорят, что *прямая a (луч h) пересекает многоугольник P* только тогда, когда при обходе многоугольника мы в соответствующем месте переходим с одной стороны

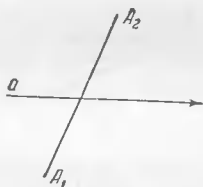


Рис. 10.

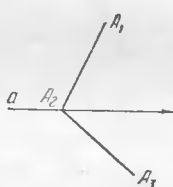


Рис. 11.

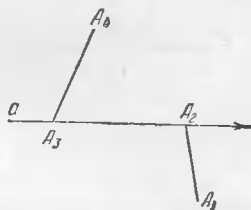


Рис. 12.

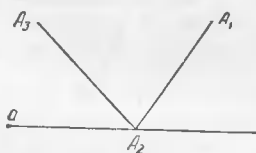


Рис. 13.

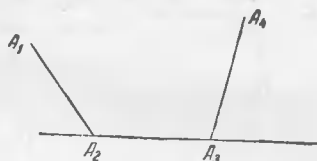


Рис. 14.

прямой a на другую, т. е. в случаях, изображенных на рис. 10, 11 и 12; на рис. 13 и 14 прямая a не пересекает многоугольник P .

После полного обхода многоугольника P мы вернемся на ту сторону прямой a , откуда был начат обход; отсюда ясно, что *число пересечений данной прямой с многоугольником — всегда четное*.

Если прямая a и многоугольник \vec{P} — ориентированные, то можно различить (как в п. 6) *положительные и отрицательные пересечения*; для первых из них при обходе многоугольника, отвечающем его ориентации, мы в месте пересечения переходим с правой стороны прямой a на левую. Если $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$, то на рис. 10 и 12 пересечение положительно, а на рис. 11 — отрицательно.

Если точка B движется вдоль ориентированной прямой по ее направлению, то число $\Delta(B, \vec{P})$ может измениться только при пересечении с многоугольником \vec{P} ; при этом в месте пересечения оно увеличивается (уменьшается) на 2π , если пересечение отрицательно (положительно).

Это очевидно для точек, не являющихся граничными для \vec{P} в силу (16) и непрерывности слагаемых $\Delta(B, A_i A_{i+1})$ в предыдущей формуле; чтобы убедиться в справедливости сказанного для граничных точек B , достаточно, основываясь на результатах п. 6, рассмотреть порознь все пять случаев, изображенных на рис. 10—14.

8. Для предстоящего доказательства теоремы Жордана необходимо ввести понятие внутренних и внешних точек многоугольника.

Точка B , лежащая в плоскости многоугольника P и не принадлежащая его контуру, называется по отношению к нему *внешней*, если

$$\Delta(B, \vec{P}) = 0, \quad (17)$$

и *внутренней*, если

$$\Delta(B, \vec{P}) = \pm 2\pi. \quad (18)$$

Так как числа $\Delta(B, \vec{P})$ при изменении ориентации многоугольника меняют лишь знак, то указанное определение не зависит от того, как будет ориентирован многоугольник P .

В дальнейшем основную роль играет

Теорема 2. Пусть \vec{P} — ориентированный простой многоугольник. При движении вдоль ориентированной прямой «а» ее положительные пересечения с \vec{P} чередуются с отрицательными (рис. 15).

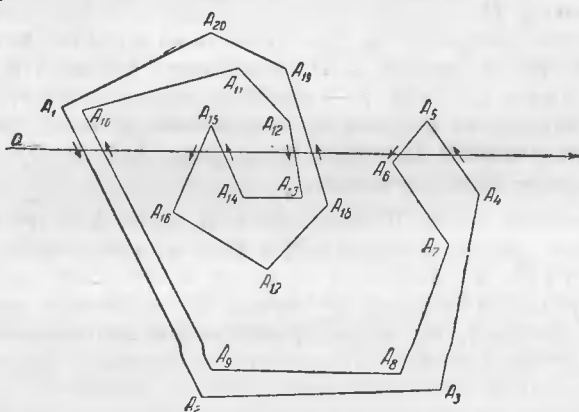


Рис. 15.

Раньше чем доказывать теорему 2, установим некоторые вытекающие из нее предложения.

Теорема 3. Всякая точка M плоскости простого многоугольника P является относительно него либо *границной*, либо *внутренней*, либо *внешней*.

Для доказательства теоремы 3 (в предположении, что теорема 2 справедлива) проведем через точку M произвольную прямую a , которую примем за ось x ; начало координат на ней выберем так, чтобы абсциссы всех вершин многоугольника P были положительны. Тогда для всех граничных точек L многоугольника мера угла $\angle(Ox, OL)$ заключена между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$, вследствие чего после полного обхода многоугольника она вернется к исходному значению, так что

$\Delta(O, \vec{P}) = 0$. Предположим, что первое пересечение оси x с многоугольником P (которое превзойдет на положительной ее части) будет отрицательно. Тогда при движении точки B по оси x вдоль ее направления до первого пересечения $\Delta(B, \vec{P}) = 0$, а после него $\Delta(B, \vec{P}) = 2\pi$ (см. последний абзац п. 7). По теореме 2 второе пересечение будет положительным и после него $\Delta(B, \vec{P}) = 0$; после третьего пересечения $\Delta(B, \vec{P}) = 2\pi$ и т. д.

Если первое пересечение оси x с \vec{P} положительно, то аналогично убедимся, что $\Delta(B, \vec{P})$ принимает только значения $0, -2\pi$; если же ось x не пересекает \vec{P} , то $\Delta(B, \vec{P})$ всегда равно нулю.

Таким образом, если точка M не является граничной для P , то $\Delta(M, \vec{P})$ равно 0 или $\pm 2\pi$, и точка M — внутренняя или внешняя по отношению к P .

Проведенное рассуждение, если принять во внимание четность числа пересечений любой прямой с P , показывает также, что справедливо

Следствие 1. Если P — простой многоугольник, то всякий луч h , исходящий из внешней по отношению к нему точки, пересекает многоугольник P четное число раз; для внутренней точки то же число — всегда нечетное.

При движении точки B вдоль ломаной число $\Delta(B, \vec{P})$ может измениться только при пересечении с P ; в силу этого становится очевидным

Следствие 2. Если для ломаной $B_1 B_2 \dots B_k$ по отношению к простому многоугольнику P точка B_1 является внутренней, а точка B_k — внешней, то ломаная пересекает многоугольник P хотя бы один раз.

9. Остается доказать теорему 2, для чего мы применим индукцию по числу n вершин многоугольника. При $n=3$ теорема 2, очевидно, справедлива: если пересечение ориентированной прямой a со стороной $A_1 A_2$ треугольника $A_1 A_2 A_3$ положительно, то по аксиоме Паша (и ее следствию) прямая a будет иметь общую точку с одной и только с одной из сторон $A_2 A_3, A_3 A_1$, причем в обоих случаях второе пересечение отрицательно; аналогично рассуждаем во всех других возможных случаях.

Мы будем, таким образом, доказывать теорему 2 для n -угольников, предполагая, что она справедлива для всех многоугольников, число сторон которых меньше n ; как показано в п. 8, для последних будет верным и следствие 2 теоремы 3.

Пусть два последовательных пересечения ориентированной прямой a с многоугольником $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$ оба положительны (см. рис. 16 и 17, где изображены два из всех возможных случаев). Остановимся

сперва на случае рис. 16, предполагая, что на отрезке KL нет граничных точек многоугольника P . Здесь невозможно равенство $k = n - 1$; в самом деле, тогда, по известной теореме о делении плоскости прямой на две полуплоскости, отрезки $A_n A_1$ и KL будут иметь общую точку, что несовместимо с отсутствием на KL граничных точек. Таким образом, $k < n - 1$, и число сторон простого многоугольника $Q = KA_2 A_3 \dots A_k L$ будет меньше n ; ломаная $A_1 K L A_{k+1}$ пересекает Q один раз, и следовательно, из точек A_1, A_{k+1} одна будет по отношению к Q внешней, а другая — внутренней. По предположению индукции мы можем применить к многоугольнику Q и к ломаной

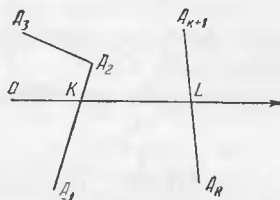


Рис. 16.

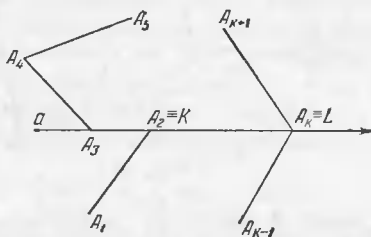


Рис. 17.

$A_{k+1} A_{k+2} \dots A_n A_1$ следствие 2 п. 8; тогда мы придем к выводу, что указанная ломаная пересекает многоугольник Q . Этот вывод противоречит тому, что многоугольник P простой и что отрезок KL свободен от его граничных точек.

Аналогичным образом придем к противоречию во всех остальных возможных случаях. Многоугольник Q следует при этом выбрать так, чтобы его первая и последняя вершины совпадали с одной из вершин многоугольника P , лежащих на отрезке KL , или же с одним из концов этого отрезка, последняя сторона многоугольника Q (расположенная на отрезке KL) была свободна от его вершин, а вторая и предпоследняя вершины многоугольника Q лежали бы по разные стороны от прямой KL . Легко видеть, что всем этим требованиям всегда можно удовлетворить: в случае рис. 17, где отрезок KL не содержит граничных точек многоугольника P , следует взять $Q = A_3 A_4 \dots A_{k-1} A_k$, а в случае рис. 18 (в предположении, что на отрезке $A_s A_t$ нет граничных точек многоугольника P и что $s < t$) $Q = A_s A_{s+1} \dots A_{t-2} A_{t-1}$.

Случай двух последовательных отрицательных пересечений сведется к уже рассмотренному, если мы изменим ориентацию прямой a на противоположную.

Итак, теорема 2 доказана, а вместе с ней доказаны все остальные три предложения п. 8. Нетрудно установить также и

Следствие 3. *Две любые внутренние (внешние) точки A и B простого многоугольника P можно соединить ломаной, не содержащей его граничных точек.*

Тогда (см. п. 8, доказательство теоремы 3) $\Delta(O, \vec{P}) = 2\pi$, и для любого луча, исходящего из точки O , первое пересечение с \vec{P} будет положительным. Проведем из точки O все лучи, идущие в вершины многоугольника P , и рассмотрим один из образовавшихся таким образом углов: $\angle MON = \varphi$, $0 < \varphi < \pi^1$) (рис. 20; внутренние точки, достаточно близкие к сторонам, покрыты штриховкой). Внутри угла MON нет граничных точек многоугольника \vec{P} ; поэтому, если сторона многоугольника P начинается на одной из сторон угла MON , от она должна пересечь другую сторону того же угла или кончаться на ней. В том случае, когда точка на стороне угла MON служит концом для двух сторон многоугольника P , проходящих внутри угла (точка A_s на рис. 20), мы будем ее рассматривать как две слившиеся точки пересечения с P . При таком условии число пересечений лучей OM и ON с P будет равно одному и тому же нечетному числу $2k + 1$ (п. 8, следствие 1); полярные радиусы точек пересечения будут соответственно

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_{2k+1}; \quad r'_1 \leq r'_2 \leq r'_3 \leq \dots \leq r'_{2k+1}. \quad (19)$$

Вычислим теперь по формуле (13) сумму тех слагаемых характеристики многоугольника \vec{P} , которые отвечают отрезкам его сторон, заключенным внутри угла MON [см. (8)], что даст:

$$(r_1 r'_1 - r_2 r'_2 + r_3 r'_3 - \dots + r_{2k+1} r'_{2k+1}) \sin \varphi; \quad (20)$$

в силу (19) число (20) положительно. Следовательно, будет положительной и характеристика многоугольника P , которую получим, сложив выражения (20), соответствующие всем углам вида MON . Теорема 4 доказана.

Если многоугольник не простой, то его характеристика может быть равна нулю; в этом убеждаемся, вычислив характеристику четырехугольника $A_1 A_2 A_4 A_3$, где A_1, A_2, A_3, A_4 — точки примера II в п. 2. (стр. 165).

В силу теоремы 4 всегда существует такая ориентация простого многоугольника \vec{P} , при которой его характеристика положительна; ее назовем *положительной ориентацией* многоугольника P . Как нетрудно видеть, из доказательств теорем 3 и 4 вытекает справедливость и такого предложения:

Теорема 5. При положительной ориентации \vec{P} простого многоугольника для любой его внутренней точки M число $\Delta(M, \vec{P}) = 2\pi$; первое пересечение с \vec{P} всякой ориентированной прямой отрицательно; точки, лежащие достаточно близко от

¹⁾ Если один из таких углов больше π , то мы разбиваем его лучом на два угла, меньших π .

стороны многоугольника, будут внутренними, если они лежат слева от нее, и внешними, если они лежат справа. Каждое из указанных свойств характеризует собой положительную ориентацию многоугольника.

Мы получили, таким образом, аксиоматическое обоснование часто применяемых свойств положительной ориентации многоугольника.

11. Теперь мы можем дать строгое определение суммы простых многоугольников.

Пусть K и L — две различные граничные точки простого многоугольника $P = A_1 A_2 \dots A_n$ (рис. 21), а $K C_1 C_2 \dots C_p L$ — ломаная, лежащая в плоскости многоугольника P и не содержащая его граничных точек, отличных от K и L ; одна из точек этой ломаной — внутренняя для многоуголь-

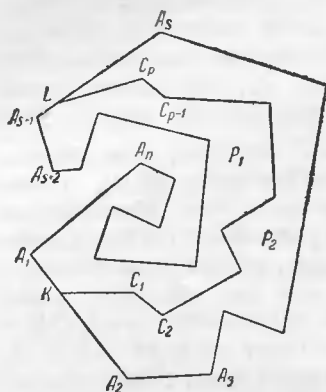


Рис. 21.

ника P . Многоугольник P называется *суммой* простых многоугольников P_1 и P_2 , что записывается так: $P = P_1 + P_2$.

По следствию 2 п. 8 все точки ломаной $K C_1 C_2 \dots C_p L$, отличные от K и от L , будут внутренними по отношению к многоугольнику P .

Пусть ориентация, заданная равенством $\vec{P} = A_1 A_2 \dots A_n$, положительная и пусть, кроме того,

$$\vec{P}_1 = A_1 K C_1 C_2 \dots C_p L A_{s+1} A_{s+2} \dots A_n,$$

$$\vec{P}_2 = A_2 A_3 \dots A_s L C_p \dots C_2 C_1 K.$$

Для любой точки B плоскости многоугольника P имеем тогда:

$$\Delta(B, \vec{P}) = \Delta(B, \vec{P}_1) + \Delta(B, \vec{P}_2), \quad (21)$$

так как каждому звену ломаной $K C_1 C_2 \dots C_p L$ будут отвечать в правой части равенства (21) два слагаемых, отличающихся одно от другого только знаком [см. также (8)].

Возьмем точку B достаточно близкой к одному из звеньев $C_k C_{k+1}$ ломаной $K C_1 C_2 \dots C_p L$ (см. сноску на стр. 174); она будет для многоугольника P внутренней, вследствие чего $\Delta(B, \vec{P}) = 2\pi$. По теореме 3 оба слагаемых правой части (21) могут принимать лишь значения $0, \pm 2\pi$; следовательно, одно из них равно нулю, а другое равно 2π . Пусть, например,

$$\Delta(B, \vec{P}_1) = 2\pi; \Delta(B, \vec{P}_2) = 0. \quad (22)$$

Первое из этих равенств показывает (по теореме 5), что ориентация \vec{P}_1 положительная и что точка B внутренняя для многоугольника P_1 .

и лежит слева от звена $C_k C_{k+1}$. Следовательно, точка B расположена справа от звена $C_{k+1} C_k$; по второму из равенств (22) точка B внешняя для многоугольника P_2 , и по теореме 5 ориентация \vec{P}_2 также положительна. Аналогичным образом получим тот же результат и в другом возможном случае.

Итак, обе ориентации \vec{P}_1 и \vec{P}_2 положительные; поэтому как левая часть равенства (21), так и каждое из обоих слагаемых его правой части могут быть равны только нулю или 2π . Отсюда без труда приходим к таким выводам:

Теорема 6. Пусть простой многоугольник P есть сумма простых многоугольников P_1 и P_2 . Никакая точка плоскости, в которой расположены все три многоугольника, не может быть внутренней для обоих многоугольников P_1 и P_2 ; всякая точка, внутренняя для P_1 (для P_2), будет внутренней для P и внешней для P_2 (для P_1); любая внутренняя точка многоугольника P будет или внутренней для одного из многоугольников P_1 и P_2 или же граничной для обоих.

Все факты, устанавливаемые теоремой 6, наглядно очевидны; мы дали им строгий вывод из аксиом геометрии.

12. Согласно изложенному в п. 11, если $P = P_1 + P_2$, то при положительных ориентациях всех трех многоугольников

$$[\vec{P}] = [\vec{P}_1] + [\vec{P}_2]$$

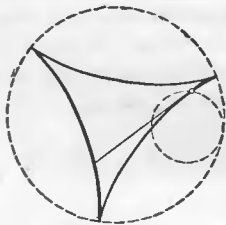
[слагаемые, отвечающие звеньям ломаной $KC_1C_2 \dots C_pL$ (рис. 21) снова уничтожаются]. Если мы примем еще во внимание теорему 1 (п. 3), а также замечание, сделанное в последнем абзаце п. 3, то придем к следующему выводу.

Теорема 7. Если за площадь каждого простого многоугольника принять половину абсолютной величины его характеристики, то будут выполнены все три требования 1°, 2° и 3°, перечисленные в п. 2.

Отмечу, что при таком условии площадь треугольника оказывается равной половине произведения его основания на соответствующую высоту (см. пример п. 2, стр. 164).

Теорема 7 устанавливает возможность измерения площадей простых многоугольников и вполне заменяет собой поэтому предпосылки Евклида в теории площадей (см. п. 1 и начало п. 2). Таким образом, нами получен упомянутый в п. 1 результат Гильберта.

носторонним треугольником, а какой-то иной, по-видимому, менее простой фигурой. Прежде всего хотелось догадаться, какова же именно эта фигура. Ответ, показавшийся весьма правдоподобным, был найден быстро. Еще в середине XIX века знаменитый немецкий геометр Я. Штейнер доказал, что так называемая **трехконечная гипоциклоида**, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности вдвое большего радиуса, обладает тем замечательным свойством, что отрезок любой касательной к этой кривой, заключенный внутри самой кривой, имеет одну и ту же длину a (см. рисунок).



Это обстоятельство, как будто, делает фигуру, ограниченную трехконечной гипоциклоидой, для которой $a=1$, самой выгодной: внутри этой фигуры можно повернуть отрезок длины 1 на 180° , но стоит только чуть-чуть уменьшить фигуру каким угодно образом — и это уже станет невозможным. Площадь, ограниченная подобной гипоциклоидой, нетрудно

подсчитать — она оказывается равной $\frac{\pi}{8} = 0,39269\dots$, т. е. заметно меньше площади равностороннего треугольника высоты 1.

Однако многочисленные попытки доказать, что если площадь фигуры меньше $\frac{\pi}{8}$, то внутри нее нельзя повернуть на 180° отрезок длины 1, оказывались неудачными. И, наконец, в 1928 г. английский математик Безикович (A. S. Besicovitch) полностью опроверг предположение о том, что решение задачи Какейя дается трехконечной гипоциклоидой — он показал, что решения у этой задачи **нет**. А именно, Безикович доказал, что **существуют фигуры сколь угодно малой площади, внутри которых можно повернуть отрезок длины 1¹⁾**; например, можно указать фигуру площади меньшей $\frac{1}{1000}$ мм, внутри которой можно повернуть на 180° километровый шест [заметим, что подобная фигура при малой площади будет иметь чрезвычайно большой диаметр²⁾].

И. Я.

¹⁾ См. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, задача 72.

²⁾ Диаметр фигуры называется наибольшее из расстояний между ее точками.

О ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НА МАКСИМУМ

В. П. Паламодов

(Москва)

1. Хорошо известны две следующие задачи: доказать, что

1) из всех выпуклых четырехугольников с заданными углами и заданным периметром наибольшую площадь имеет тот, который может быть описан около окружности;

2) из всех выпуклых четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет тот, который может быть вписан в окружность¹⁾.

Эти задачи обычно сводят к алгебраическим задачам на максимум. Дадим чисто геометрическое их решение.

2. Решим первую задачу. Докажем прежде всего следующую лемму: если в выпуклом четырехугольнике с заданными углами увеличить две соседние стороны, то его периметр увеличится. (То же произойдет, если увеличить только одну сторону четырехугольника, а другую оставить без изменения.)

Действительно, если $ABCD$ — исходный, а $AB'C'D'$ — преобразованный четырехугольник ($AB' > AB$, $AD' \geq AD$, рис. 1), то ломаная $BB'C'D'D$ объемлет ломаную $BBCD$; следовательно, длина первой ломаной больше длины второй, откуда следует утверждение леммы.

Пусть теперь (рис. 2) $ABCD$ — четырехугольник с заданными углами и заданным периметром и притом такой, который может быть описан вокруг окружности²⁾, O — ее центр, $OK = OP = OT = OF = r$

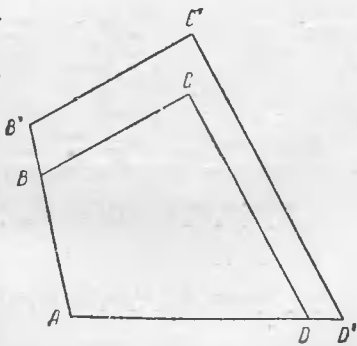


Рис. 1.

¹⁾ См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, М., 1952, задачи 149 и 150.

²⁾ Существование такого четырехугольника доказывается методом подобия: опишем вокруг некоторой окружности четырехугольник с данными углами и построим подобный ему четырехугольник с данным периметром.

— радиусы, проведенные в точки касания, $AB_1C_1D_1$ — произвольный четырехугольник с теми же углами и тем же периметром. Условимся обозначать площадь фигуры теми же буквами, что и саму фигуру, заключенными в круглые скобки, $S_{ABCD} = (ABCD)$. Требуется доказать, что $(ABCD) > (AB_1C_1D_1)$.

Из равенства периметров и углов и неравенства самих четырехугольников следует, что хотя бы одна сторона четырехугольника $AB_1C_1D_1$ больше соответственной стороны четырехугольника $ABCD$;

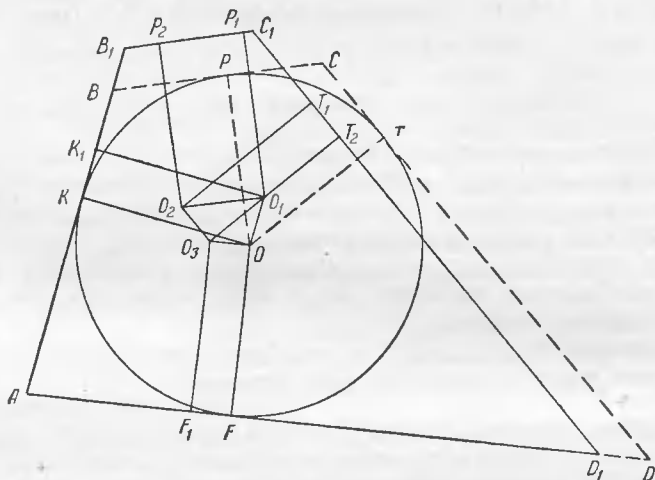


Рис. 2.

пусть, например, $AB_1 > AB$. Отсюда вытекают три неравенства: $B_1C_1 < BC$, $C_1D_1 > CD$, $D_1A < DA$ (если бы было $B_1C_1 \geq BC$, то согласно лемме периметры обоих четырехугольников не были бы одинаковы; так же доказываются и остальные два неравенства).

Выделим на рис. 2 четырехугольники $KBPO$, $PCTO$, $TDFO$ и построим три новых четырехугольника, равных им:

$$K_1B_1P_1O_1 \equiv KBPO, P_2C_1T_1O_2 \equiv PCTO, T_2D_1F_1O_3 \equiv TDFO.$$

Из чертежа видно, что

$$(AB_1C_1D_1) = (AB_1P_1O_1OF) + (F_1O_3O_2P_2C_1D_1) - (F_1O_3O_2P_2P_1O_1OF). \quad (1)$$

Но

$$\begin{aligned} (AB_1P_1O_1OF) &= (AKOF) + (K_1B_1P_1O_1) + (KK_1O_1O) = \\ &= (AKOF) + (KBPO) + KK_1 \cdot r, \\ (F_1O_3O_2P_2C_1D_1) &= (F_1O_3T_2D_1) + (O_2T_1C_1P_2) + (O_3O_2T_1T_2) = \\ &= (FOTD) + (OTCP) + TT_1 \cdot r, \\ (F_1O_3O_2P_2P_1O_1OF) &= (F_1FOO_3) + (O_2P_2P_1O_1) + (O_3O_2O_1O) = \\ &= F_1F \cdot r + P_2P_1 \cdot r + (O_3O_2O_1O). \end{aligned}$$

Подставляя эти три равенства в (1) и учитывая, что

$$(AKOF) + (KBPO) + (FOTD) + (OTCP) = (ABCD),$$

получаем:

$$(AB_1C_1D_1) = (ABCD) + [KK_1 + T_1T_2 - F_1F - P_2P_1] \cdot r - (O_3O_2O_1O).$$

Но нетрудно видеть что в силу равенства периметров четырехугольников $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю (ибо $KK_1 = AB_1 - AB$, $T_1T_2 = C_1D_1 - CD$, $F_1F = AD - AD_1$, $P_2P_1 = B_1C_1 - BC$).

Следовательно,

$$(AB_1C_1D_1) = (ABCD) - (O_3O_2O_1O),$$

т. е. площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади четырехугольника $AB_1C_1D_1$, что и требовалось доказать ¹⁾.

3. Переходим ко второй задаче. Ее формулировка получается из формулировки первой задачи, если заменить углы сторонами и стороны углами (условие постоянства периметра переходит в условие постоянства суммы углов, которое не нужно специально оговаривать, так как эта сумма всегда равна 360°), а описанный четырехугольник заменить вписанным. Доказательство аналогично только что проведенному.

Докажем прежде всего следующую лемму: Если четырехугольник $ABCD$, оставаясь выпуклым, изменяется так, что три его стороны AB , BC и CD , а также угол ABC остаются постоянными, то с увеличением угла BCD увеличивается и четвертая сторона AD (рис. 3).

Это следует из того, что в силу выпуклости четырехугольника вершина D вынуждена оставаться на дуге $A'KC'$ окружности, двигаясь от A' к C' . Из этой леммы вытекает следствие:

Если у двух выпуклых четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ и $\angle ABC_1 \leq \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD \leq \angle B_1C_1D_1$, то $AD < A_1D_1$.

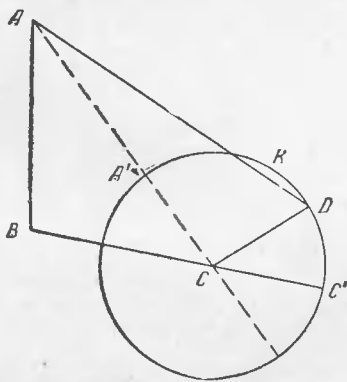


Рис. 3.

¹⁾ Аналогично может быть решена задача и в том случае, если четырехугольник не является выпуклым и даже если он имеет самопересечения; в последнем случае нужно уточнить понятие площади (см., например, А. М. Лопшиц, Вычисление площадей ориентируемых фигур, М., 1956).

Пусть теперь (рис. 4) $ABCD$ — четырехугольник с заданными сторонами, вписанный в окружность радиуса R с центром O , а ABC_1D_1 — произвольный треугольник с теми же сторонами. Требуется доказать, что $(ABCD) > (ABC_1D_1)$.

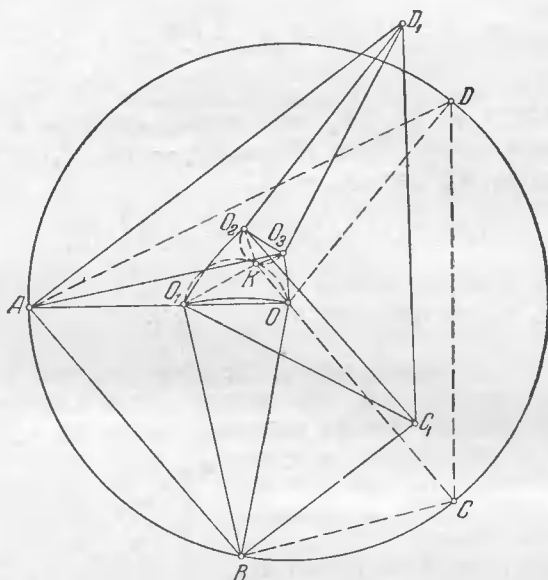


Рис. 4.

Из неравенства обоих четырехугольников следует, что хотя бы один угол четырехугольника ABC_1D_1 , прилежащий к стороне AB , отличен от соответственного угла четырехугольника $ABCD$. Пусть, например, $\angle D_1AB > \angle DAB$. Отсюда вытекают еще три неравенства:

$$\angle ABC_1 < \angle ABC, \quad \angle BC_1D_1 > \angle BCD, \quad \angle C_1D_1A < \angle CDA$$

(если бы было $\angle ABC_1 > \angle ABC$, то из леммы следовало бы $C_1D_1 > CD$; аналогично доказываются и остальные два неравенства).

Выделим на рис. 4 треугольники BOC , COD и DOA ; построим равные им треугольники:

$$\triangle BO_1C_1 = \triangle BOC, \quad \triangle C_1O_2D_1 = \triangle COD, \quad \triangle D_1O_3A = \triangle DOA$$

и проведем одним и тем же радиусом R дуги $\widehat{OO_1}$, $\widehat{O_1O_2}$, $\widehat{O_2O_3}$ и $\widehat{O_3O}$ соответственно с центрами B , C_1 , D_1 и A .

Докажем, что из этих четырех дуг сумма двух (не имеющих общих концов) равна сумме двух других и меньше 180° .

Действительно,

$$\begin{aligned}\overline{OO_1} &= \angle ABC - \angle ABC_1, & \overline{O_3O_2} &= \angle CDA - \angle C_1D_1A, \\ \overline{OO_3} &= \angle BAD_1 - \angle BAD, & \overline{O_1O_2} &= \angle BC_1D_1 - \angle BCD.\end{aligned}$$

Сложим первые два равенства, а затем из этой суммы вычтем последние два. Имеем:

$$\begin{aligned}\overline{OO_1} + \overline{O_3O_2} &= \angle ABC + \angle CDA - \angle ABC_1 - \angle C_1D_1A = \\ &= 180^\circ - \angle ABC_1 - \angle C_1DA < 180^\circ, \\ \overline{OO_1} + \overline{O_3O_2} - \overline{OO_3} - \overline{O_1O_2} &= \\ &= (\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB) - \\ &- (\angle ABC_1 + \angle BC_1D_1 + \angle C_1D_1B + \angle D_1AB) = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\overline{OO_1} + \overline{O_3O_2} = \overline{OO_3} + \overline{O_1O_2} < 180^\circ.$$

Таким образом, в четырехугольнике $OO_1O_2O_3$, составленном из дуг четырех окружностей одного и того же радиуса R , суммы двух противоположных дуг равны и меньше 180° .

Докажем еще, что дуги $\overline{OO_1}$ и $\overline{O_3O_2}$ не пересекаются.

Допустим противное: пусть существует общая точка K этих дуг. Докажем тогда, что она лежит внутри окружности радиуса R с центром C_1 . Пусть K лежит вне этой окружности (рис. 5) и дуги $\overline{O_1TK}$, $\overline{O_2PK}$ соответственно симметричны дугам $\overline{O_1K}$ и $\overline{O_2K}$ относительно стягивающих их хорд. Так как все дуги одинакового радиуса, то «ломаная» кривая $\overline{O_1TKPO_2}$

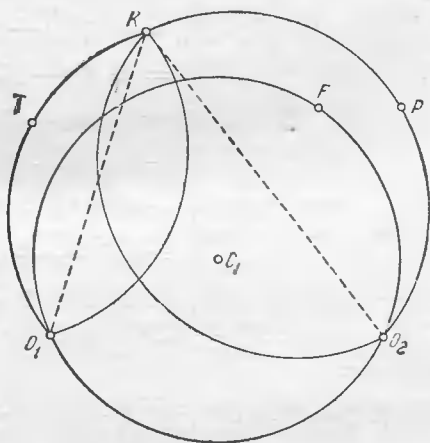


Рис. 5.

объемлет дугу $\overline{O_1FO_2}$ и, следовательно, длиннее ее. Отсюда

$$\overline{O_1TK} + \overline{O_2PK} + \overline{O_1O_2} = \overline{O_1K} + \overline{O_2K} + \overline{O_1O_2} \geq 360^\circ.$$

Следовательно, либо $180^\circ \leq \overline{O_1K} + \overline{O_2K} < \overline{O_1O} + \overline{O_2O_3}$, либо $\overline{O_1O_2} \geq 180^\circ$; но каждое из этих неравенств, как мы показали, невозможно. Значит, точка K , если она существует, должна лежать внутри окружности с центром C_1 и радиуса R (рис. 4), откуда

$$\angle O_1KO_2 > \frac{\overline{O_1O_2}}{2}.$$

Аналогично получаем:

$$\angle OKO_3 > \frac{\overline{OO_3}}{2}.$$

Легко также видеть, что

$$\angle OKO_1 = \frac{360^\circ - \overline{OO_1}}{2} \quad \text{и} \quad \angle O_3KO_2 = \frac{360^\circ - \overline{O_3O_2}}{2}.$$

Сложим эти четыре неравенства (равенства):

$$\begin{aligned} \angle O_1KO_2 + \angle O_2KO_3 + \angle O_3KO_1 + \angle OKO_1 > \\ > 360^\circ + \frac{\overline{OO_3} + \overline{O_1O_2} - \overline{OO_1} - \overline{O_3O_2}}{2} = 360^\circ. \end{aligned}$$

Полученное противоречие и доказывает, что дуги $\overline{OO_1}$ и $\overline{O_2O_3}$ не пересекаются.

Теперь из рис. 4 имеем:

$$(ABC_1D_1) = (BC_1D_1O_2O_1) + (BOO_3D_1A) - (BOO_3D_1O_2O_1). \quad (2)$$

Но

$$\begin{aligned} (BC_1D_1O_2O_1) &= (BC_1O_1) + (C_1D_1O_2) + (C_1O_2O_1) = \\ &= (BCO) + (CDO) + \overline{O_1O_2} \cdot \frac{R^2}{2}, \\ (BOO_3D_1A) &= (BOA) + (O_3D_1A) + (OO_3A) = \\ &= (BOA) + (ODA) + \overline{OO_3} \cdot \frac{R^2}{2}, \\ (BOO_3D_1O_2A_1) &= (BOO_1) + (O_3D_1O_2) + (OO_1O_2O_3) = \\ &= \overline{OO_1} \cdot \frac{R^2}{2} + \overline{O_3O_2} \cdot \frac{R^2}{2} + (OO_1O_2O_3). \end{aligned}$$

Подставляя эти три равенства в (2) и учитывая, что

$$(BCO) + (CDO) + (DAO) + (ABO) = (ABCD),$$

получаем:

$$(ABC_1D_1) = (ABCD) + [\overline{OO_3} + \overline{O_1O_2} - \overline{OO_1} - \overline{O_3O_2}] \cdot \frac{R^2}{2} - (OO_1O_2O_3).$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, как мы видели выше, равно нулю; следовательно,

$$(ABC_1D_1) = (ABCD) - (OO_1O_2O_3),$$

т. е. площадь четырехугольника $ABCD$ больше площади четырехугольника ABC_1D_1 , что и требовалось доказать.

ОБ ОДНОЙ ПАРЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТЕТРАЭДРОВ

З. А. Скопец

(Ярославль)

1. Из числа тетраэдров *общего вида* (о которых известно только то, что все его вершины не лежат в одной плоскости) можно выделить определенные классы *специальных тетраэдров*, удовлетворяющих тем или иным условиям. Например, в школьном курсе геометрии рассматриваются три типа специальных тетраэдров: 1) *правильный тетраэдр*, у которого все ребра равны; 2) *правильная треугольная пирамида*, в основании которой лежит правильный треугольник и боковые ребра равны, и 3) *прямоугольный тетраэдр*, у которого один трехгранный угол прямой.

К числу хорошо изученных специальных тетраэдров относятся, кроме перечисленных выше: 1) *ортоцентрический тетраэдр*, у которого все высоты пересекаются в одной точке (ортоцентре)¹⁾; 2) *равногранный тетраэдр*, у которого грани — равные треугольники; 3) *изодинамический тетраэдр*, у которого прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке; 4) *изогональный тетраэдр*, у которого прямые, соединяющие вершины тетраэдра с точками касания вписанной сферы с противоположными гранями, пересекаются в одной точке — и многие другие.

Некоторые специальные тетраэдры обладают, кроме свойства, положенного в их определение, и другими свойствами чисто метрического характера; их элементы (длины ребер, площади граней, плоские и двугранные углы и др.) удовлетворяют каким-либо соотношениям, которые не имеют места для произвольного тетраэдра. Например, ортоцентрический тетраэдр можно определить как такой, у которого суммы квадратов противолежащих ребер равны.

Многие свойства специальных тетраэдров могут быть получены как частные случаи свойств тетраэдров общего вида; однако соответствующие выводы часто основаны на фактах из специальных областей геометрии (проективная геометрия, теория алгебраических поверхностей и пространственных кривых, теория кремоновых преобразований). Мы

¹⁾ Некоторые свойства ортоцентрического тетраэдра рассмотрены в статье Г. П. Крейцера и Г. И. Тюринга «Сферы Эйлера ортоцентрического симплекса», «Математическое просвещение», вып. 2, стр. 187—194. (Прим. ред.).

предлагаем нижеследующее *элементарное* изложение двух известных метрических свойств специальных тетраэдров; одно из них относится к изодинамическому, а другое — к изогональному тетраэдру. Эти свойства позволяют установить связь между рассматриваемыми типами специальных тетраэдров. Этот материал может быть использован педагогом в математическом кружке (школьном или при педагогическом институте) ¹⁾.

2. Пусть дан тетраэдр $T_1(A_1, A_2, A_3, A_4)$, около которого описана сфера Σ . Касательные плоскости β_i к сфере в вершинах A_i пересекают противоположные грани α_i тетраэдра T_1 по прямым a_i , вообще говоря, не принадлежащим одной плоскости. Согласно известной теореме Шаля эти прямые образуют *гиперболическую четверку*, т. е. всякая прямая, пересекающая три из этих прямых, пересекает четвертую или параллельна ей ²⁾.

Как известно, четыре попарно скрещивающиеся прямые образуют гиперболическую четверку в том и только в том случае, если существуют три прямые, каждая из которых лежит в одной плоскости с каждой из данных четырех прямых ³⁾. Соберем в таблицу точки пересечения прямых a_i с ребрами $A_j A_k$ данного тетраэдра:

Ребра Прямые	$A_1 A_2$	$A_1 A_3$	$A_1 A_4$	$A_2 A_3$	$A_2 A_4$	$A_3 A_4$
a_1	—	—	—	P_{23}	P_{21}	P_{31}
a_2	—	P_{13}	P_{11}	—	—	P'_{34}
a_3	P_{12}	—	P'_{11}	—	P'_{21}	—
a_4	P'_{12}	P'_{13}	—	P'_{23}	—	—

¹⁾ Геометрия тетраэдра имеет более чем полуторавековую историю и в полной мере не систематизирована; ее результаты рассыпаны по многочисленным журнальным статьям. Некоторые вопросы геометрии тетраэдра рассмотрены во 2-й части книги Д. И. Перепелкина «Курс элементарной геометрии», ч. II, М.—Л., 1949; много относящихся сюда задач можно найти во 2-й части книги Ж. Адамара «Элементарная геометрия», в 3-й части книги Д. О. Шклярского и др. «Избранные задачи и теоремы элементарной математики». Элементарный очерк геометрии тетраэдра дает книга Coudere et Balafout, Le premier livre du tétraedre, Paris, 1935. Излагаемые в настоящей статье вопросы в этих книгах не содержатся.

²⁾ Четыре прямые подобного рода принадлежат к одному семейству прямолинейных образующих некоторого однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида.

³⁾ Эту теорему можно элементарно доказать, воспользовавшись теоремой Менелая для косого четырехугольника. См. З. А. Скопец, Плоскости «л»

В каждой грани тетраэдра имеется 6 точек из 12 точек P_{ik} и P'_{ik} — на каждом ребре по две точки. В плоской грани $\alpha_1 = A_2 A_3 A_4$ (изображенной на рис. 1) лежат точки $P_{23}, P'_{23}, P_{34}, P'_{34}, P_{24}, P'_{24}$.

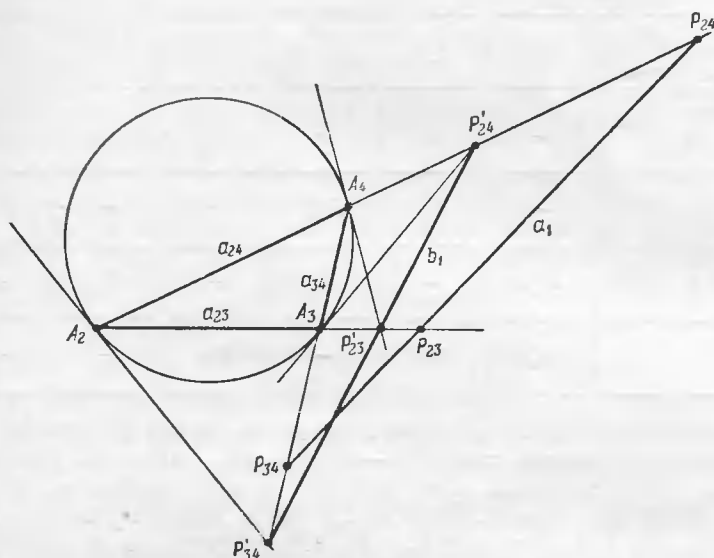


Рис. 1.

Из этих 6 точек 3 точки P_{23}, P_{24}, P_{34} лежат на прямой a_1 . Покажем, что и остальные три точки $P'_{23}, P'_{24}, P'_{34}$ также принадлежат одной прямой b_1 .

Действительно, из подобия треугольников $A_2 A_4 P'_{23}$ и $A_3 A_4 P'_{23}$ следует:

$$\overrightarrow{A_2 P'_{23}} : \overrightarrow{P'_{23} A_3} = -a_{24}^2 : a_{34}^2, \quad (*)$$

где через a_{ij} обозначена длина ребра $A_i A_j$ тетраэдра T_1 .

Точно так же

$$\overrightarrow{A_3 P'_{34}} : \overrightarrow{P'_{34} A_4} = -a_{23}^2 : a_{24}^2 \text{ и } \overrightarrow{A_4 P'_{24}} : \overrightarrow{P'_{24} A_2} = -a_{34}^2 : a_{23}^2.$$

Следовательно,

$$(\overrightarrow{A_2 P'_{23}} : \overrightarrow{P'_{23} A_3}) (\overrightarrow{A_3 P'_{34}} : \overrightarrow{P'_{34} A_4}) (\overrightarrow{A_4 P'_{24}} : \overrightarrow{P'_{24} A_2}) = -1,$$

и точки $P'_{23}, P'_{24}, P'_{34}$ (на основании обратной теоремы Менелая) лежат на одной прямой b_1 .

косого четырехугольника и связанные с ними тетраэдры Мёбиуса, «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 155 — 161.

Аналогично прямой b_1 определяются прямые b_2 , b_3 и b_4 ; при этом принадлежность точек P_{ik} и P'_{ik} четырем прямым b_i указывается в следующей таблице:

Ребра Прямые	A_1A_2	A_1A_3	A_1A_4	A_2A_3	A_2A_4	A_3A_4
b_1	—	—	—	P'_{23}	P'_{24}	P'_{34}
b_2	—	P'_{13}	P'_{14}	—	—	P_{34}
b_3	P'_{12}	—	P_{14}	—	P_{24}	—
b_4	P_{12}	P_{13}	—	P_{23}	—	—

Как нетрудно заметить, вторая таблица получается из первой заменой прямых a_i прямыми b_i , точек P'_{ik} — точками P_{ik} и обратно. Прямая b_1 лежит в одной плоскости с каждой из четырех прямых a_i , ибо эта прямая лежит в той же плоскости α , что и прямая a_1 , и пересекает прямые a_2 , a_3 и a_4 в точках P'_{23} , P'_{24} , P'_{34} . Отсюда и вытекает, что обе четверки прямых являются гиперболическими.

3. Выясним теперь, существуют ли такие специальные тетраэдры у которых прямые a_i (а вместе с тем и прямые b_i) принадлежат одной плоскости. Для того чтобы это обстоятельство имело место, надо потребовать, чтобы прямые a_i попарно пересекались ¹⁾. Очевидно, что прямая a_1 пересекает прямую a_2 в том и только том случае, если точки P_{24} и P'_{34} совпадают. Но в этом случае

$$a_{13}^2 : a_{14}^2 = a_{23}^2 : a_{24}^2 \text{ или } a_{13}^2 a_{23}^2 = a_{14}^2 a_{23}^2 \text{ [см. (*)].} \quad (1)$$

Если a_2 пересекает a_3 , то

$$a_{12}^2 a_{34}^2 = a_{24}^2 a_{13}^2. \quad (2)$$

Из последних двух равенств следует также, что

$$a_{12}^2 a_{34}^2 = a_{14}^2 a_{13}^2; \quad (3)$$

это влечет за собой пересечение прямых a_1 и a_3 . Но легко проверить, что равенство (1) влечет за собой также взаимное пересечение прямых a_3 и a_4 , равенство (2) — прямых a_1 и a_4 и равенство (3) —

¹⁾ Мы можем не опасаться, что прямые a_i окажутся принадлежащими одной связке, так как в таком случае центр связки должен был бы принадлежать всем четырем граням α_i , что невозможно.

пересечение a_2 и a_4 . Тем самым доказано, что если имеют место все три равенства, то прямые a_i принадлежат одной плоскости. Справедливо также и обратное утверждение.

Если прямые a_1, a_2, a_3, a_4 принадлежат одной плоскости σ , то, согласно теореме Дезарга, тетраэдр T_2 , грани которого касаются сферы Σ в точках A_i , перспективен с данным тетраэдром T_1 ¹⁾. Обратно, если тетраэдр T_2 перспективен с тетраэдром T_1 , то прямые a_i принадлежат одной плоскости и у тетраэдра T_1 произведения противоположных ребер равны.

Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. Пусть около тетраэдра T_1 (A_1, A_2, A_3, A_4) описана сфера Σ и в вершинах A_i к сфере проведены касательные плоскости, образующие тетраэдр T_2 . Необходимое и достаточное условие перспективности тетраэдров T_1 и T_2 заключается в выполнении следующих равенств:

$$a_{12} \cdot a_{34} = a_{23} \cdot a_{41} = a_{31} \cdot a_{24}, \quad (A)$$

т. е. в равенстве произведений противоположащих ребер тетраэдра T_1 .

Тетраэдр T_1 , удовлетворяющий условию (A), называется *изодинамическим*.

4. Отметим без доказательства еще два свойства изодинамического тетраэдра T_1 :

1) Если вершины тетраэдра T_1 соединить с центрами окружностей, вписанных в противоположащие грани, то полученные четыре прямые пересекаются в одной точке (в общем тетраэдре эти прямые образуют гиперболическую четверку прямых).

2) Каждые три грани тетраэдра T_1 пересекают касательную плоскость к описанной сфере Σ в вершине, в которой сходятся эти три грани, по трем прямым, образующим при этой вершине шесть углов по 60° (в общем тетраэдре эти шесть углов не равны, однако, в различных касательных плоскостях образуются одинаковые шестерки углов).

Оба свойства являются характеристическими для T_1 .

Тетраэдр T_2 обладает сходными свойствами:

1) Если вершины B_i тетраэдра T_2 соединить с точками A_i , в которых вписанная сфера Σ касается граней тетраэдра T_2 , то полученные четыре прямые пересекаются в одной точке. Это непосредственно следует из перспективности тетраэдров T_1 и T_2 (теорема 1).

¹⁾ Два тетраэдра называются *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке. Соответствующие ребра двух перспективных тетраэдров пересекаются в шести точках, принадлежащих одной плоскости, и обратно: этой же плоскости принадлежат и прямые пересечения соответствующих граней тетраэдров. (В частном случае, прямые, соединяющие соответствующие вершины обоих тетраэдров, могут быть параллельными; также могут оказаться параллельными соответствующие ребра. Теорема Дезарга при этом несколько видоизменяется.)

Выясним, какое свойство тетраэдра T_2 соответствует свойству 2) тетраэдра T_1 .

Соединим точку касания A_1 сферы Σ к грани β_1 тетраэдра T_2 с тремя вершинами B_2, B_3, B_4 , принадлежащими этой грани (рис. 2). При точке A_1 образуются три угла, которые обозначим соответственно через $\alpha_{23}^{(1)}, \alpha_{24}^{(2)}, \alpha_{34}^{(1)}$ (индекс наверху в скобках обозначает номер грани).

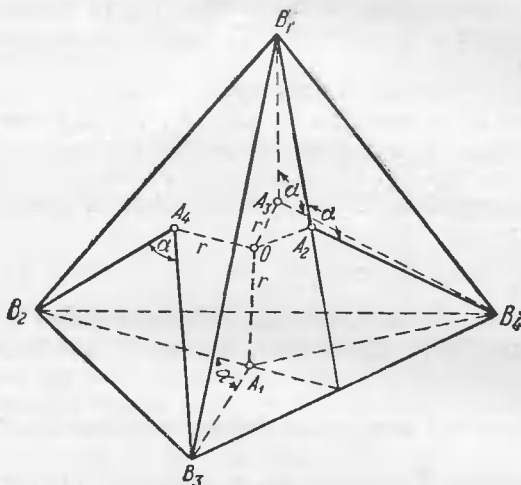


Рис. 2.

Аналогично можно построить углы и в других гранях, причем

$$\alpha_{23}^{(1)} + \alpha_{34}^{(1)} + \alpha_{42}^{(1)} = 360^\circ,$$

$$\alpha_{34}^{(2)} + \alpha_{41}^{(2)} + \alpha_{13}^{(2)} = 360^\circ,$$

$$\alpha_{41}^{(3)} + \alpha_{12}^{(3)} + \alpha_{24}^{(3)} = 360^\circ,$$

$$\alpha_{12}^{(4)} + \alpha_{23}^{(4)} + \alpha_{31}^{(4)} = 360^\circ.$$

Но из равенства треугольников $A_k B_i B_j$ и $A_l B_i B_j$ ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$, все различны)¹⁾ следует, что

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(l)}, \text{ т. е. что}$$

$$\alpha_{12}^{(3)} = \alpha_{12}^{(4)}, \alpha_{23}^{(1)} = \alpha_{23}^{(4)},$$

$$\alpha_{31}^{(4)} = \alpha_{31}^{(2)}, \alpha_{24}^{(1)} = \alpha_{24}^{(3)},$$

$$\alpha_{34}^{(1)} = \alpha_{34}^{(2)}, \alpha_{14}^{(2)} = \alpha_{14}^{(3)}.$$

Учитывая выписанные выше четыре равенства, получим:

$$\alpha = \alpha_{23}^{(1)} = \alpha_{23}^{(4)} = \alpha_{14}^{(2)} = \alpha_{14}^{(3)},$$

$$\beta = \alpha_{12}^{(4)} = \alpha_{12}^{(3)} = \alpha_{34}^{(1)} = \alpha_{34}^{(2)},$$

$$\gamma = \alpha_{31}^{(2)} = \alpha_{31}^{(4)} = \alpha_{24}^{(3)} = \alpha_{24}^{(1)}.$$

Таким образом, углы при точках A_i в гранях β_i соответственно равны. Из 12 углов различными являются в общем случае лишь три угла α, β, γ .

Прямые $B_1 A_2$ и $B_2 A_1$ пересекаются на ребре $B_3 B_4$. Это значит, что

$$(B_1 B_3 A_2) : (B_1 B_4 A_1) = (B_2 B_3 A_1) : (B_2 B_4 A_1),$$

где круглая скобка обозначает площадь соответствующего треугольника.

Из последнего равенства находим:

$$\begin{aligned} (B_1 A_2 \cdot B_3 A_2 \cdot \sin \gamma) (B_2 A_1 \cdot B_4 A_1 \cdot \sin \gamma) = \\ = (B_1 A_2 \cdot B_4 A_2 \cdot \sin \alpha) (B_2 A_1 \cdot B_3 A_1 \cdot \sin \alpha). \end{aligned}$$

¹⁾ В силу симметрии относительно биссекторной плоскости при ребре $B_i B_j$.

Но $B_3A_1=B_3A_2=B_3A_4$, $B_4A_1=B_4A_2=B_4A_3$, как отрезки касательных к сфере Σ , выходящие из одной точки. Следовательно, $\sin^2 \alpha = \sin^2 \gamma$ и $\gamma = \gamma^1$). Аналогичным образом доказываем, что $\beta = \alpha$, и поэтому $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$.

Точки A_i являются, таким образом, *точками Торичелли*²⁾ соответствующих граней тетраэдра T_2 .

Теорема 2. Если прямые, соединяющие вершины тетраэдра с точками касания вписанной сферы с противолежащими гранями, пересекаются в одной точке, то точки касания являются *точками Торичелли* этих граней.

Обозначим линейные углы двугранных углов тетраэдра T_2 при ребрах B_iB_k через β_{ik} . Если из центра O сферы, вписанной в T_2 , опустить на грани β_i и β_k и на ребро, по которому они пересекаются, перпендикуляры OA_i , OA_k , OA_{ik} , то из прямоугольного треугольника OA_iA_{ik} (рис. 3) найдем, что $\frac{1}{2}a_{ik} = r \cos \frac{\beta_{ik}}{2}$, где r — радиус вписанной сферы. Следовательно,

$$a_{ik} = 2r \cos \frac{\beta_{ik}}{2}.$$

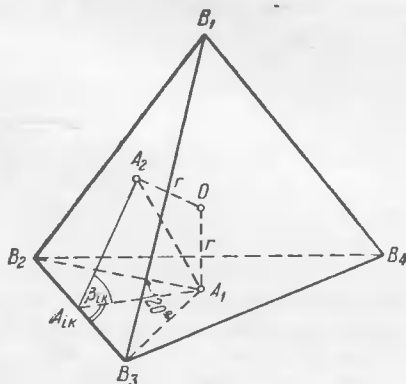


Рис. 3.

Но для T_1 мы имели $a_{12}a_{34} = a_{23}a_{41} = a_{31}a_{24}$ (теорема 1). Поэтому для T_2 будем иметь:

$$\cos \frac{\beta_{12}}{2} \cos \frac{\beta_{34}}{2} = \cos \frac{\beta_{23}}{2} \cos \frac{\beta_{41}}{2} = \cos \frac{\beta_{31}}{2} \cos \frac{\beta_{42}}{2}. \quad (B)$$

Обратно, если выполняются последние условия для T_2 , то выполняются условия, характеризующие тетраэдр T_1 .

Теорема 3. Если у тетраэдра точки касания вписанной сферы с гранями являются *точками Торичелли* этих граней, то произведения косинусов половин линейных углов при противолежащих ребрах этого тетраэдра равны.

Тетраэдр T_2 , для которого выполняются условия (B), называется *изогональным*.

¹⁾ Равенство $\alpha = 180^\circ - \gamma$ не может иметь места, так как точки A_i являются для граней β_i тетраэдра T_2 внутренними точками, и если $\alpha + \gamma = 180^\circ$, то $\beta = 180^\circ$ и точка A принадлежит ребру, что невозможно.

²⁾ Если все углы треугольника меньше 120° , то внутри треугольника существует единственная точка, из которой стороны треугольника видны под равными углами. Эта точка называется *точкой Торичелли*; сумма ее расстояний до вершин треугольника является минимальной. (См. С. И. Зетель, Новая геометрия треугольника, М., Учпедгиз, 1940, стр. 91.)

5. Из изложенного выше вытекает следующая теорема, устанавливающая связь между изодинамическими и изогональными тетраэдрами.

Теорема 4. Если T_1 есть изодинамический тетраэдр, то тетраэдр T_2 , образованный четырьмя плоскостями, касающимися описанной вокруг T_1 сферы Σ в вершинах T_1 , является изогональным. При этом каждый изогональный тетраэдр можно получить таким образом из изодинамического, т. е. если T_2 есть изогональный тетраэдр, то четыре точки соприкосновения его граней с вписанной сферой являются вершинами изодинамического тетраэдра.

НОВЫЙ ВЫВОД ПЛОЩАДЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТРАПЕЦИИ И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

И. М. Яглом

(Москва)

Нетрудно видеть, что вывод известной формулы для площади, ограниченной эллипсом, а также формул для площадей иных фигур, ограниченных дугой эллипса, — эллиптического сектора и эллиптического сегмента — может быть получен как тривиальное следствие из общей теории аффинных преобразований¹⁾: поскольку эллипс аффинным преобразованием может быть переведен в окружность, то задача нахождения площади ограниченной им фигуры может быть сведена к аналогичной задаче для окружности. За последнее время в нашей учебной и научно-популярной литературе приобрел известную популярность вывод формул для площадей фигур, ограниченных гиперболой, основанный на свойствах аффинных преобразований, переводящих гиперболу в себя, — гиперболических поворотов²⁾.

В настоящей заметке указывается, как с помощью весьма близких соображений можно найти выражения и для площадей фигур, ограниченных параболой; при этом основную роль здесь играют аффинные преобразования, переводящие в себя параболу, — параболические повороты.

1. Напомним прежде всего тот вывод формул для площадей фигур, ограниченных гиперболой, который здесь имеется в виду. *Гиперболическим поворотом*, связанным с гиперболой $xy = 1$, называется аффинное преобразование, представляющее собой произведение двух сжатий к прямым: сжатия к асимптоте $y = 0$ гиперболы, с коэффициентом сжатия k :

$$x' = x, \quad y' = ky,$$

¹⁾ См., например, Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I, М., 1948, стр. 118—124 и 242—243.

²⁾ См. Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I, стр. 284—287 или В. Г. Шерватов, Гиперболические функции, М., 1958, стр. 37—45; идейно близки к рассматриваемому также выводы площади гиперболической трапеции в книгах: А. И. Маркушевич, Площади и логарифмы, М.—Л., 1952, стр. 22—29 и А. М. Яглом и И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., 1954, стр. 73—76 и 463—469.

и сжатия к асимптоте $y=0$ с коэффициентом сжатия $\frac{1}{k}$:

$$x' = \frac{1}{k}x, y' = y.$$

Аналитически гиперболический поворот записывается формулами:

$$x' = \frac{1}{k}x, y' = ky;$$

очевидно, он представляет собой аффинное преобразование, переводящее в себя гиперболу $xy=1$ и оставляющее на месте каждую из асимптот гиперболы. Чрезвычайно важно, что гиперболический поворот есть преобразование *эквааффинное*, т. е. площади фигур при таком

преобразовании сохраняются. Заметим еще, что, подобрав подходящим образом коэффициент $k > 0$ гиперболического поворота, мы можем при помощи этого преобразования перевести любую точку «положительной» ветви гиперболы $xy=1$ в любую другую точку той же ветви.

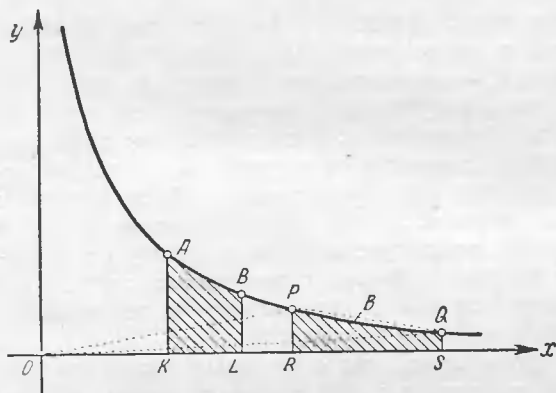


Рис. 1.

Обозначим теперь площадь гиперболической трапеции $PQSR$

(рис. 1), ограниченной гиперболой $xy=1$, осью абсцисс и прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$ ($x_2 > x_1 > 0$), через $F(x_1, x_2)$; эту функцию двух переменных x_1, x_2 нам и надо найти. Использование гиперболического поворота позволяет свести функцию $F(x_1, x_2)$ к более простой функции $f(u) = F(1, u)$ одного переменного u ; $f(u)$ есть площадь гиперболической трапеции $ABLK$, ограниченной гиперболой, осью абсцисс и прямыми $x=1$ и $x=u$. В самом деле, рассмотрим гиперболический поворот, переводящий точку P в вершину A гиперболы, и пусть B есть та точка, в которую переводит этот гиперболический поворот точку Q . Так как гиперболический поворот переводит в себя асимптоты гиперболы и (как и всякое аффинное преобразование) сохраняет параллельность прямых, то он переводит гиперболическую трапецию $PQSR$ в трапецию $ABLK$. Далее, так как отношение отрезков прямой сохраняется при аффинном преобразовании, то

$$\frac{OS}{OR} = \frac{OL}{OK} \quad \text{или} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{u}{1}.$$

Отсюда мы заключаем, что $u = \frac{x_2}{x_1}$ и, следовательно, в силу эквивалентности гиперболического поворота

$$F(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь (рис. 2) две гиперболические трапеции $ABLK$ и $BCML$, ограниченные гиперболой $xy = 1$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = u$, соответственно $x = u$ и $x = w$. Так как сумма их площадей равна площади большей трапеции $ACMK$, то имеем:

$$f(w) = f(u) + F(u, w)$$

или, учитывая соотношение (1),

$$f(w) = f(u) + f\left(\frac{w}{u}\right).$$

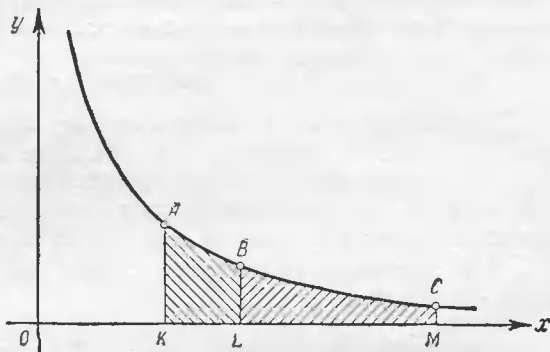


Рис. 2.

Положив здесь, для большей простоты, $\frac{w}{u} = v$, $w = uv$, мы перепишем последнее равенство в виде

$$f(uv) = f(u) + f(v). \quad (2)$$

Это и есть основное функциональное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(u)$.

Хорошо известно, что уравнению (2) удовлетворяет функция $\log u$; нетрудно показать также, что из (2) с необходимостью следует равенство $f(u) = \log u$. В самом деле, из (2) без труда выводим

$$f(u^\alpha) = \alpha f(u) \quad (\alpha > 0)$$

(сначала убеждаемся, что это равенство справедливо при целых значениях α , затем при рациональных α и, наконец, используя очевидные из геометрических соображений непрерывность или монотонность функции $f(x)$, что оно справедливо при произвольных вещественных α).

Обозначим теперь через e такое значение u , что $f(e) = 1$ (т. е. что площадь трапеции AB_0L_0K , где $OL_0 = e$, равна 1). В таком случае имеем:

$$f(u) = f\left(e^{\log_e u}\right) = \log_e u \cdot f(e) = \log_e u.$$

Итак,

$$f(u) = \log_e u, \quad F(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \log_e \frac{x_2}{x_1}. \quad (3)$$

Что же касается числа e , то, используя несложные геометрические соображения, нетрудно убедиться, что оно совпадает с «неперовым числом»: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Это рассуждение может быть использовано также и для вывода формулы для площади гиперболического сектора OPQ (рис. 1); нетрудно, впрочем, убедиться, что площадь сектора OPQ равна площади трапеции $PQSR$. Из формулы (3) можно также вывести выражение для площади гиперболического сегмента PbQ :

$$S_{PbQ} = S_{\text{трап. } PQSR} - F(x_2, x_1).$$

До сих пор мы всё время говорили лишь о гиперболе $xy=1$. Однако нетрудно перенести всё сказанное и на гиперболу $xy=a$: либо применяя гиперболический поворот сразу к этой гиперболе, либо используя то, что гипербола $xy=a$ центрально подобна (гомотетична) гиперболе $xy=1$ с центром подобия O и коэффициентом подобия \sqrt{a} и что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

2. Перейдем теперь к параболе $y=x^2$. *Параболическим поворотом*, связанным с этой параболой, называется аффинное преобразование, представляющее собой произведение сдвига $x'=x$, $y'=y+2kx$ с осью $x=0$ и коэффициентом $2k$ и параллельного переноса $x'=x+k$, $y'=y+k^2$ ¹⁾. Аналитически параболический поворот записывается формулами:

$$x' = x + k, \quad y' = y + 2kx + k^2;$$

он представляет собой аффинное (и даже эквиаффинное!) преобразование, переводящее параболу $y=x^2$ в себя и сдвигающее каждую прямую, параллельную оси параболы $x=0$, на постоянное расстояние k . Нетрудно видеть, что, подобрав подходящим образом коэффициент $2k$ параболического поворота, мы можем при помощи этого преобразования перевести любую точку «положительной» (или «правой») половины параболы в любую другую точку той же ее половины.

Обозначим теперь площадь параболической трапеции $PQSR$, ограниченной параболой $y=x^2$, осью абсцисс и прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$ ($x_2 > x_1 > 0$, рис. 3), через $\Phi(x_1, x_2)$; эту функцию двух переменных x_1 и x_2 нам и надо найти. Использование параболического поворота позволяет свести эту функцию к функции одного переменного $\varphi(u) = \Phi(0, u)$; $\varphi(u)$ есть площадь «параболического треугольника» OBL , ограниченного параболой, осью абсцисс и одной прямой $x=u$. В самом деле, пусть параболический поворот, переводящий точку P в вершину O параболы, переводит точку Q в B , при этом в ось абсцисс

¹⁾ См. Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I, стр. 315–317.

фигур равна площади параболического треугольника OCM , то заключаем: $\varphi(w) = \varphi(u) + \Phi(u, w)$ или, учитывая (1'),

$$\varphi(w) = \varphi(u) + \varphi(w - u) + uw(w - u).$$

Положив здесь $w - u = v$, $w = u + v$, мы перепишем последнее равенство в виде

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) + uv(u + v). \quad (2')$$

Это и есть основное функциональное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(u)$.

Легко видеть, что уравнению (2') удовлетворяет функция $\frac{1}{3}u^3$ [ибо $\frac{1}{3}(u + v)^3 = \frac{1}{3}(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}v^3 + uv(u + v)$]; докажем, что $\varphi(u) = \frac{1}{3}u^3$.

Для этого обозначим разность $\varphi(u) - \frac{1}{3}u^3 = \psi(u)$ и докажем, что $\psi(u) = 0$. Подставив в уравнение (2') вместо $\varphi(u)$ сумму $\frac{1}{3}u^3 + \psi(u)$, получим после сокращения:

$$\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v). \quad (4)$$

Из (4) без труда выводим $\psi(\alpha u) = \alpha \cdot \psi(u)$ (сначала убеждаемся, что это равенство справедливо при целых значениях α , затем при рациональных α и, наконец, используя очевидную из геометрических соображений непрерывность функции $\psi(u) = \varphi(u) - \frac{1}{3}u^3$, что оно справедливо при всех вещественных α). Обозначив теперь $\psi(1) = C$, будем иметь: $\psi(u) = \psi(u \cdot 1) = u \cdot \psi(1) = Cu$.

Таким образом, мы заключаем, что

$$\varphi(u) = \frac{1}{3}u^3 + \psi(u) = \frac{1}{3}u^3 + Cu.$$

Заметим теперь, что C не может быть отрицательным числом, так как

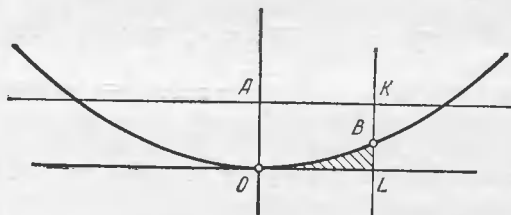


Рис. 5.

в противном случае функция $\varphi(u) = u \left(\frac{1}{3}u^2 + C \right)$ была бы отрицательной при достаточно малых (но положительных) значениях u , в то время как $\varphi(u) = S_{OBL}$ по своему своему смыслу положительна при

любом $u > 0$. Далее, C не может быть также и положительно, так как в противном случае при любом $u > 0$ было бы $\varphi(u) = Cu + \frac{1}{3}u^3 > Cu$, что невозможно, так как при достаточно малом u площадь $\varphi(u)$ параболического треугольника OBL заведомо будет меньше площади Cu прямоугольника $OAKL$ с основанием $OL = u$ и высотой $OA = C$ (рис. 5). Но если число C не может быть ни отрицательным, ни положительным, то оно должно равняться нулю; таким образом, $C = 0$ и

$$\varphi(u) = \frac{1}{3}u^3,$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_2 - x_1) + x_1 x_2 (x_2 - x_1) = \frac{1}{3}x_2^3 - \frac{1}{3}x_1^3, \quad (3')$$

что и решает задачу нахождения площади параболической трапеции.

Из формулы (3') нетрудно вывести также и выражение для площади параболического сектора PbQ :

$$\begin{aligned} S_{PbQ} &= S_{PQSR} - \Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \\ &= \frac{1}{6}(x_2 - x_1)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}, \end{aligned}$$

а так как

$$\begin{aligned} S_{\triangle PTQ} &= S_{PQSR} - S_{PTSR} = \\ &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2(x_2 - x_1) = \\ &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^3 \end{aligned}$$

и площадь $S_{\triangle PNQ}$ треугольника PNQ , ограниченного хордой PQ и касательными PT и QN параболы, равна

$$S_{\triangle PNQ} = \frac{1}{2}S_{\triangle PTQ} = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^3$$

(QN есть медиана $\triangle PTQ$, ибо параболический поворот переводит ее в медиану BG треугольника OBL), то

$$S_{PbQ} = \frac{2}{3}S_{\triangle PNQ} \quad (\text{результат Архимеда}).$$

Мы ограничились здесь рассмотрением параболы $y = x^2$. Но все полученные результаты можно перенести и на «общую» параболу $y = ax^2$, применяя параболический поворот сразу к этой параболе или используя то, что парабола $y = ax^2$ центрально подобна (гомотетична) параболе $y = x^2$ с центром подобия O и коэффициентом подобия $\frac{1}{a}$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО \leftrightarrow ПАРАЛЛЕЛЬНО!

Наряду со скалярным произведением двух векторов $a \cdot b = |a| |b| \cos(\hat{a}, b)$, в ориентированной плоскости (т. е. такой, где установлено положительное направление отсчета углов — обычно против часовой стрелки) рассматривают псевдоскалярное произведение: $a \times b = |a| |b| \sin(\hat{a}, b)$. Первое произведение коммутативно ($b \cdot a = a \cdot b$), а второе антикоммутативно ($b \times a = -a \times b$), но другие свойства этих произведений одинаковы: если обозначить знак произведения (\cdot или \times) через \circ , то для обоих произведений¹⁾

$$a \circ (\lambda b) = \lambda(a \circ b), (\lambda a) \circ b = \lambda(a \circ b), \\ a \circ (b_1 + b_2) = a \circ b_1 + a \circ b_2, (a_1 + a_2) \circ b = a_1 \circ b + a_2 \circ b.$$

Эти свойства и то, что $\begin{cases} a \cdot b = 0 \text{ лишь в том случае, когда } a \perp b, \\ a \times b = 0 \text{ » » » » » } a \parallel b, \end{cases}$ порождают своеобразную «двойственность», позволяющую в формулировках некоторых теорем заменять слово «перпендикулярно» словом «параллельно» и наоборот, без нарушения справедливости теорем.

Приведем два примера.

I. Если прямые, проведенные через вершины треугольника ABC перпендикулярно соответствующим сторонам другого параллельно

треугольника $A_1B_1C_1$ (т. е. через вершину $A \perp (||)$ стороне B_1C_1 и т. д.), пересекаются в одной точке O, то и прямые, проведенные через вершины треугольника $A_1B_1C_1 \perp (||)$ соответствующим сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке O_1 .

II. Если два невырожденных полных четырехугольника²⁾ (т. е. таких, что никакие три вершины четырехугольника не лежат на одной прямой) расположены так, что каждая из пяти сторон первого $\perp (||)$ соответствующей стороне второго, то и шестая сторона первого $\perp (||)$ шестой стороне второго.

Докажем, для примера, первую из этих теорем. За начало отсчета векторов примем точку O, радиусы-векторы точек A, B, C, A_1 , B_1 , C_1 обозначим через a, b, c, a_1, b_1, c_1 . Из условия теоремы следует, что $a \circ (b_1 - c_1) = 0$. т. е.

$$a \circ b_1 = a \circ c_1 \quad (1a) \text{ и аналогично } b \circ c_1 = b \circ a_1 \quad (1b), c \circ a_1 = c \circ b_1 \quad (1c).$$

Если теперь обозначить через r радиус-вектор точки O_1 пересечения прямых, проведенных через точки A_1 и $B_1 \perp (||)$ прямым BC и CA (соответственно), то будем иметь $(b - c) \circ (a_1 - r) = 0$, т. е.

$$b \circ a_1 - c \circ a_1 = b \circ r - c \circ r \quad (2a)$$

$$\text{и аналогично } c \circ b_1 - a \circ b_1 = c \circ r - a \circ r \quad (2b).$$

Складывая (2a) и (2b) и используя то, что, в силу (1a — в), $b \circ a_1 = b \circ c_1$, $c \circ a_1 = c \circ b_1$, $a \circ b_1 = a \circ c_1$, получаем

$$b \circ c_1 - a \circ c_1 = b \circ r - a \circ r \text{ или } (b - a) \circ (c_1 - r) = 0,$$

откуда следует, что прямая $O_1C_1 \perp (||) AB$.

И. Яглом

¹⁾ См. Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, М.—Л., 1950, стр. 86—95 и 100—105.

²⁾ Сторонами полного четырехугольника ABCD являются 6 прямых, соединяющих его вершины, — прямые AB, AC, AD, BC, BD, CD.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. **Н. А. Андреев** (г. Порхов, Псковская обл.). Суммирование одинаковых степеней последовательности натуральных чисел. Формулы, с помощью которых можно выполнить суммирование последовательности степеней натуральных чисел, хорошо известны. Следующие формулы, содержащие по сравнению с обычными на один параметр больше, позволяют иногда выполнить такое суммирование быстрее (здесь a — первый член последовательности, b — последний, n — число членов):

1) Сумма квадратов натуральных чисел:

$$S = abn + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

2) Сумма квадратов четных (нечетных) натуральных чисел:

$$S = abn + \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}.$$

3) Сумма кубов натуральных чисел:

$$S = \left[\frac{n(n-1)}{2} + ab \right] \cdot \frac{n(a+b)}{2}.$$

4) Сумма кубов четных (нечетных) натуральных чисел:

$$S = [2n(n-1) + ab] \cdot \frac{n(a+b)}{2}.$$

5) Сумма четвертых степеней натуральных чисел:

$$S = an[nb^2 + ab(n-1)] + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \cdot \frac{3n(n-1)-1}{5}.$$

6) Сумма четвертых степеней четных (нечетных) натуральных чисел:

$$S = an[2nb^2 - ab + ab(a-1)] + \frac{8n(n-1)(2n-1)}{6} \cdot \frac{3n(n-1)-1}{5}.$$

Пример: вычислить $S = 15^3 + 16^3 + 17^3 + \dots + 23^3$. Применяем известную формулу $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$:

$$S = \left(\frac{23 \cdot 24}{2} \right)^2 - \left(\frac{14 \cdot 15}{2} \right)^2 = (23 \cdot 12)^2 - (7 \cdot 15)^2 = \\ = 276^2 - 105^2 = 76\,176 - 11\,025 = 65\,151.$$

Применяем формулу 3) ($a = 15$, $b = 23$, $n = 9$):

$$S = \left[\frac{9 \cdot 8}{2} + 15 \cdot 23 \right] \cdot \frac{9 \cdot (15 + 23)}{2} = (36 + 345) \cdot 9 \cdot 19 = \\ = 381 \cdot 171 = 65\,151.$$

С помощью указанных формул можно легко получить формулы, позволяющие суммировать одинаковые степени членов арифметических прогрессий. Например, *сумма кубов членов любой арифметической прогрессии* может быть найдена по следующей формуле (d — разность прогрессии):

$$S = \frac{n(a+b)}{2} \cdot \left[\frac{n(a+b)d}{2} + a^2 - ad \right].$$

2. А. М. Лопшиц (Москва). О распределительном свойстве умножений в векторной алгебре. При доказательстве распределительности произведений в большинстве учебных руководств по векторной алгебре используются некоторые специальные геометрические конструкции: для скалярного произведения — теоремы о проекциях, а для векторного произведения — громоздкое геометрическое рассуждение, сопровождаемое сложным чертежом (самый сложный чертеж в учебнике по векторной алгебре!). С точки зрения учащихся эти доказательства являются «необходимым злом», стоящим на пути овладения ясной и простой по содержанию теоремой¹⁾. С точки же зрения преподавателя тягостно использование геометрических средств школьной геометрии (с присущими им логическими несовершенствами) к выводу основных законов «геометрической алгебры», которая создается для построения «царского пути» в геометрии.

Ниже приводятся «алгебраизированные» доказательства, использующие только два основных геометрических факта: теорему косинуса (для скалярного произведения) и теорему об объеме параллелепипеда (для векторного произведения).

1. Используя известное определение скалярного произведения двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ и его следствие $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, запишем теорему косинуса (для треугольника OAB): $AB^2 = OA^2 + OB^2 -$

¹⁾ Часто преподавателю приходится убеждать учащегося в самой необходимости доказательства — так велико гипнотизирующее влияние названия «произведение» на чужесловенный ум, впервые осваивающий новый вид умножения.

— $2OA \cdot OB \cdot \cos(AOB)$ в следующем виде (приняв для краткости обозначения: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$):

$$(a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a + b \cdot b - 2(a \cdot b). \quad (1)$$

Полагая здесь вместо вектора b вектор $-b$ и учитывая, что в силу определения $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, получим:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + b \cdot b + 2(a \cdot b). \quad (2)$$

Вычитая (1) из (2), получим:

$$(a + b) \cdot (a + b) - (a - b) \cdot (a - b) = 4(a \cdot b). \quad (3)$$

В силу формул (1) и (2) имеем:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \cdot (a + b + c) &= \\ &= a \cdot a + 2\{a \cdot (b + c)\} + \{b \cdot b + c \cdot c + 2(b \cdot c)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (a + b - c) \cdot (a + b - c) &= \\ &= a \cdot a + 2\{a \cdot (b - c)\} + \{b \cdot b + c \cdot c - 2(b \cdot c)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4) и используя (3), получим:

$$4\{(a + b) \cdot c\} = 2\{a \cdot (b + c)\} - 2\{a \cdot (b - c)\} + 4(b \cdot c). \quad (6)$$

Сравнивая тождество (4) с тождеством

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b + c) &= \\ &= \{a \cdot a + b \cdot b - 2(a \cdot b)\} + c \cdot c + 2\{(a + b) \cdot c\}, \end{aligned} \quad (7)$$

получим $a \cdot (b + c) + b \cdot c = (a + b) \cdot c + a \cdot b$ и, следовательно,

$$(a + b) \cdot c = a \cdot (b + c) + b \cdot c - a \cdot b. \quad (8)$$

Подставляя (8) в левую часть (6), получим:

$$a \cdot (b + c) + a \cdot (b - c) = 2(a \cdot b). \quad (9)$$

Учитывая, наконец, что любые два вектора p и q могут быть представлены в виде $p = b + c$, $q = b - c$, и приняв во внимание, что $2(a \cdot b) = a \cdot (2b)$ ¹⁾, получим:

$$a \cdot p + a \cdot q = a \cdot (p + q), \text{ ч. т. д.} \quad (10)$$

II. Используя известное определение векторного произведения двух векторов a и b : $a \times b = S \cdot n^0$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b , а n^0 — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, содержащей перемножаемые векторы, и образующий с ними правую тройку a, b, c , докажем (повторяя рассуждения,

¹⁾ Это равенство является, очевидно, геометрическим следствием определения скалярного произведения; оно может быть, однако, получено чисто алгебраически: следует только положить в тождестве (9) вектор c равным вектору b .

изложенные в любом курсе векторной алгебры), что объем V (положительное число!) параллелепипеда, построенного на трех векторах a , b , c , образующих в указанном порядке правую тройку, определяется по формуле $V = (a \times b) \cdot c$. Учитывая, что упорядоченная тройка векторов b , c , a будет при этом также правой¹⁾, придем к выводу, что $V = (b \times c) \cdot a$, и, следовательно, к равенству

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c). \quad (11)$$

Оно справедливо и в том случае, когда упорядоченная тройка a , b , c левая: следует только учесть, что тройка a , b , $-c$ будет тогда правой, и поэтому $(a \times b) \cdot (-c) = a \cdot (b \times (-c))$. Приняв во внимание, что $b \times (-c) = -b \times c$, получим (11).

Пусть теперь x — какой-либо вектор. Тогда в силу (11)

$$\begin{aligned} x \cdot \{a \times (b + c)\} &= (x \times a) \cdot (b + c) = (x \times a) \cdot b + (x \times a) \cdot c = \\ &= x \cdot (a \times b) + x \cdot (a \times c) = x \cdot \{a \times b + a \times c\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая, наконец, что равенство $x \cdot u = x \cdot v$ (при произвольном векторе x) влечет за собой равенство $u = v$, получим:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \text{ ч. т. д.} \quad (13)$$

3. А. К. Харадзе (Тбилиси). **Определитель-циркулянт как единый алгебраический аппарат для решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней.** *Циркулянт* принято называть определитель, каждая строка которого получается из предыдущей круговой перестановкой элементов. Известно, что такой определитель n -го порядка разлагается на n множителей, линейных относительно своих элементов²⁾.

Рассмотрим порознь три уравнения относительно x :

$$\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix} = 0 \quad (1), \quad \begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0 \quad (2), \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \quad (3),$$

левые части которых представляют циркулянты соответственно 2-го, 3-го и 4-го порядков. Раскроем эти определители:

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 &= 0 \quad (1'), & x^3 - 3xab + a^3 + b^3 &= 0, & (2'), \\ x^4 - 2x^2(b^2 + 2ac) + 4xb(a^2 + c^2) + b^4 - 4b^2ac - & \\ - (a^2 + c^2)^2 + 4a^2c^2 &= 0. & (3') \end{aligned}$$

¹⁾ Это утверждение представляется почти очевидным, если воспользоваться следующим определением: упорядоченная тройка неколлинеарных векторов \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} называется *правой* (*левой*), если для наблюдателя, смотрящего на ориентированный треугольник ABC из точки O , направление обхода $ABCA$ представится идущим *по* часовой стрелке (*против* часовой стрелки). (См. А. Лопшиц, Аналитическая геометрия, М., 1948, стр. 305, а также С. Бахвалов, Л. Бабушкин, В. Иваницкая, Аналитическая геометрия, М., 1958, стр. 182.)

²⁾ См., например, Э. Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 1, гл. 1, § 33.

Это в свою очередь можно переписать так:

$$(x + a)(x - a) = 0, \quad (1'')$$

$$(x + a + b)(x + \omega a + \omega^2 b)(x + \omega^2 a + \omega b) = 0, \quad (2'')$$

$$(x + a + b + c)(x + ia - b - ic) \times \\ \times (x - a + b - c)(x - ia - b + ic) = 0, \quad (3'')$$

где $i^2 = -1$, ω — первообразный корень уравнения $z^3 - 1 = 0$.

Следовательно, если уравнения 2-й, 3-й, 4-й степеней имеют вид (1'), (2'), (3'), то корни их прямо получаются из разложений (1''), (2''), (3''). Наша задача состоит в том, чтобы произвольное уравнение соответствующей степени привести к виду (1'), (2') или (3'), а это означает, что по коэффициентам заданного уравнения потребуется найти соответствующий параметр a в определителе (1), два параметра a и b в (2) и три параметра a , b и c в (3). Покажем, что это достигается путем решения цепи уравнений степеней низших, чем данное, или той же степени, но вида двучленного¹⁾.

Известно, что во всяком уравнении посредством линейного преобразования можно удалить член, непосредственно следующий за старшим. Поэтому уравнение 2-й степени можно предполагать заданным в виде $x^2 + A = 0$, а потому отождествление левой части с выражением (1') даст $a^2 = -A$ и параметр будет найден: $a = \pm \sqrt{-A}$. Перед радикалом можем взять любой из двух знаков.

В уравнении 3-й степени $x^3 + px + q = 0$ отождествим левую часть с выражением (2'); получим $ab = -\frac{p}{3}$, $a^3 + b^3 = q$. Следовательно, a^3 и b^3 можно рассматривать как корни уравнения $z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0$, и, таким образом, два параметра a и b найдутся в результате решения уравнения 2-й степени и двух двучленных уравнений 3-й степени.

Наконец, в уравнении 4-й степени $x^4 + Mx^2 + Nx + P = 0$ также сравним левую часть с выражением (3'). Параметры должны удовлетворять условиям

$$b^2 + 2ac = -\frac{M}{2}, \quad b(a^2 + c^2) = \frac{N}{4}, \\ b^4 - 4b^2ac - (a^2 + c^2)^2 + 4a^2c^2 = P.$$

¹⁾ Такой способ обозрения алгебраической структуры корней уравнений поучителен в том отношении, что он дает возможность элементарными средствами «заглянуть выше» и убедиться, что, начиная с 5-й степени, в общем случае положение существенно усложняется. Для этого достаточно было бы раскрыть выражение циркулянта 5-го порядка и отождествить его с левой частью заданного уравнения 5-й степени. Первые же шаги по этому пути показали бы, что нахождение четырех параметров циркулянта в данном случае невозможно при помощи уравнений более простых, чем данное.

Для решения этой системы прежде всего выразим из первых двух равенств a и c через b :

$$ac = -\left(\frac{M}{4} + \frac{b^2}{2}\right), \quad a^2 + c^2 = \frac{N}{4b}; \quad (4)$$

тогда третье условие примет вид

$$b^4 + (M + 2b^2)b^2 - \frac{N^2}{16b^2} + 4\left(\frac{M}{4} + \frac{b^2}{2}\right)^2 - P = 0,$$

и мы получим уравнение 6-й степени, но лишь с четными степенями искомого параметра b , а потому b^2 будет найден как корень уравнения 3-й степени. Возвращаясь к (4), найдем a и c как корни уравнения 2-й степени, поскольку b уже известен. Итак, решение уравнения 4-й степени приводится к цепи одного уравнения 3-й и ряда уравнений 2-й степени.

Заметим, что для решения уравнения 4-й степени можно использовать также определитель, несколько отличный от циркулянта, и мы придем к цепи уравнений, лежащих в основе *способа Эйлера*. В самом деле, справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 8abcx + (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2). \quad (5)$$

С другой стороны, легко убедиться, что произведение

$$(x + a + b + c)(x + a - b - c)(x - a + b - c)(x - a - b + c) \quad (6)$$

тождественно равно определителю (5). Таким образом, если мы сравним левую часть данного уравнения 4-й степени с правой частью (5), то получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{M}{2}, \quad abc = \frac{N}{8}, \quad a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \frac{M^2 - 4P}{16}.$$

Отсюда видно, что a^2 , b^2 , c^2 являются корнями уравнения 3-й степени с коэффициентами, рациональными относительно M , N , P . Найдя выражения a , b и c , можно получить искомые корни данного уравнения 4-й степени, приравняв нулю (6); другими словами, в данном случае получим ту самую конструкцию корней, к которой приводит способ Эйлера.

4. В. М. Чернышенко (Днепропетровск). Об одном итерационном методе решения алгебраических уравнений. Рассмотрим многочлен $f(x) \equiv x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$. Возьмем некоторое число x_0

¹⁾ Мы предполагаем, что $b \neq 0$, ибо в противном случае данное уравнение привелось бы к биквадратному.

и определим другое число x_1 по формуле

$$x_1 = \sqrt[n]{-(A_1 x_0^{n-1} + \dots + A_n)}, \quad (1)$$

что можно записать в виде $x_1^n = x_0^n - f(x_0)$. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — корни многочлена $f(x)$. Введем величину Δ соотношением $x_0 = a_n + \Delta$. По формуле Тейлора имеем:

$$x_1^n = \varphi(a_n) + \varphi'(a_n)\Delta + \frac{\varphi''(a_n)}{2}\Delta^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n-1)}(a_n)}{(n-1)!}\Delta^{n-1}, \quad (2)$$

где $\varphi(x) = x^n - f(x) = x^n - (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$,

$$\varphi(a_n) = a_n^n, \quad \varphi'(a_n) = n a_n^{n-1} - (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}),$$

$$\varphi''(a_n) = n(n-1)a_n^{n-2} - 2[(a_n - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-2})],$$

$$\varphi^{(n-1)}(a_n) = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 a_n - (n-1)! [(a_n - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})].$$

Подставляя эти значения производных в (2), получим:

$$\begin{aligned} x_1^n = & a_n^n + \{n a_n^{n-1} - (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})\} \Delta + \\ & + \left\{ \frac{n(n-1)}{2} a_n^{n-2} - [(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1) \dots \right. \\ & \left. \dots (a_n - a_{n-2})] \right\} \Delta^2 + \dots + \{n a_n - [(a_n - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})]\} \Delta^{n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем следующее определение: если существует число α , такое, что для любого $x_0 > \alpha$ число x_1 , определенное по формуле (1), также больше α , то будем говорить, что исходный многочлен $f(x)$ имеет специально итерационный вид; число α будем называть гранью итерации.

Теорема. Если многочлен $f(x)$ имеет хотя бы один действительный корень, то подстановкой $x = t - T$ (t — новая переменная) его можно привести к специально итерационному виду.

Доказательство. Пусть a_n — наибольший действительный корень многочлена (1). Пусть, далее, $L = \max \{|a_n - a_1|, \dots, |a_n - a_{n-1}|\}$. С помощью подстановки $x = t - T$ мы можем добиться того, чтобы было $a_n^* \geq L^*$ [взяв, например, в качестве T число $3 \max \{|A_1|, \dots, |A_n|\} + 3$]; здесь a_n^* , L^* — соответственно a_n и L для полученного многочлена относительно t . В этом случае выражения, стоящие в фигурных скобках (3), будут положительными, а значит, для любых положительных Δ имеет место неравенство $x_1 > a_n$; таким образом, многочлен имеет специально итерационный вид, число a_n является гранью итерации. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем считать, что многочлен имеет хотя бы один действительный корень, что он имеет специально итерационный вид и что гранью итерации является наибольший корень.

Из условия $x_1 = x_0 + \Delta$ имеем:

$$x_0^n = a_n^n + na_n^{n-1}\Delta + \frac{n(n-1)}{2}a_n^{n-2}\Delta^2 + \dots + na_n\Delta^{n-1} + \Delta^n. \quad (4)$$

(3) и (4) дают

$$\begin{aligned} x_1^n - x_0^n = & -(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) \Delta - \\ & - [(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-2})] \Delta^2 - \dots \\ & \dots - [(a_n + a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})] \Delta^{n-1} - \Delta^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть наибольший действительный корень a_n многочлена $f(x)$ имеет кратность k , т. е. $a_{n-k+1} = a_{n-1} = a_n$. Формула (5) примет вид

$$\begin{aligned} x_1^n - x_0^n = & -(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-k}) \Delta^k - \\ & - [(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-k}) + \dots + (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-k-1})] \Delta^{k-1} - \dots \\ & \dots - [(a_n - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-k})] \Delta^{n-1} - \Delta^n. \end{aligned} \quad (6)$$

При достаточно больших положительных Δ правая часть равенства (6), очевидно, отрицательна. Если предположить, что при некотором положительном Δ правая часть (6) положительна, то отсюда будет следовать, что при некотором Δ правая часть (6) равна нулю, а это противоречит тому, что a_n — самый большой корень. Значит, при $\Delta > 0$ $x_1 < x_0$.

Таким образом, если построить последовательность по формуле

$$x_0 = a_n + \Delta \quad (\Delta > 0), \quad x_{i+1} = \sqrt[n]{-(A_i x_i^{n-1} + \dots + A_n)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

то эта последовательность будет ограниченной снизу, так как по доказанной теореме a_n является гранью итерации. С другой стороны, в силу (12) эта последовательность — монотонно убывающая. Значит, эта последовательность сходится. Ее пределом является, очевидно, a_n .

Рассмотренное дает возможность сформулировать следующий метод нахождения действительных корней алгебраических уравнений:

1° Данное уравнение приводится к специально итерационному виду.

2° Берется число x_0 , заведомо большее действительных корней уравнения, и строится последовательность x_0, x_1, \dots . Это дает возможность с любой степенью точности определить наибольший действительный корень уравнения.

3° Используя известный корень, понижаем степень уравнения.

4° Повторяем указанные операции, начиная с 2°.

Таким образом, мы находим все корни уравнения или на некотором этапе получим расходящуюся последовательность, что будет означать, что остальные корни комплексные.

Так как предлагаемый метод содержит циклические процессы, его удобно программировать для электронных счетных машин. Этот метод может с успехом применяться для нахождения грубого приближения; уточнение значения корня может производиться каким-либо другим способом.

IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

ДЕСЯТЬ ЛЕТ РАБОТЫ СЕКЦИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

П. Я. Дорф

(Москва)

4 марта 1958 г. исполнилось десять лет работы секции средней школы Московского математического общества. При организации указывалось, что

«Задача секции — содействовать повышению культуры преподавания математики в советской школе, обмен преподавательским опытом, установление живой и постоянной связи между преподавателями средней и высшей школы»¹⁾.

Членами секции являются, главным образом, учителя и методисты Москвы и Московской области. Для руководства работой секции на первом ее заседании, 4 марта 1948 г. было избрано бюро под председательством А. И. Маркушевича. Заседания секции проходили и продолжают проходить ежемесячно по третьим четвергам, десять раз в году²⁾.

Основным направлением работы секции являются: ознакомление с математическими идеями (научно-популярные темы), общими вопросами постановки образования и, в частности, преподавания математики (педагогические темы), методика преподавания математики (методические темы), история математики (исторические темы), критика учебников и других пособий. Подробные информации о работе секции систематически помещаются в «Учительской газете» и в журнале «Математика в школе»; здесь мы ограничимся перечнем некоторых вопросов, рассматривавшихся на заседаниях секции (с указанием докладчиков и времени доклада)³⁾.

¹⁾ «Успехи математических наук», т. III, вып. 4 (26), 1948.

²⁾ Место заседаний — МГУ (сначала на Моховой, а позднее — на Ленинских горах).

³⁾ О деятельности секции, начиная со второго десятилетия, будет систематически сообщаться в «Математическом просвещении». (Прим. ред.)

I. Научно-популярные темы

- С. А. Яновская. Об аксиоматическом методе в математике (апрель 1948 г.).
- А. Я. Хинчин. Диофантовы приближения (январь 1951 г.).
- А. И. Маркушевич. О необходимых и достаточных условиях в математических предложениях (март 1952 г.).
- А. Я. Хинчин. Задачи из теории вероятностей (сентябрь 1952 г.).
- Н. М. Бескин. Аффинные преобразования (февраль 1953 г.).
- А. С. Кронрод. Машинная математика (апрель 1953 г.).
- Н. М. Бескин. Теорема Чевы и теорема Менелая в пространстве (май 1954 г.).
- Я. С. Дубнов. Величина и число (февраль 1955 г.)¹⁾.
- И. М. Яглом. Геометрические преобразования (январь 1956 г.).
- А. А. Ляпунов. Что такое кибернетика (декабрь 1956 г.).

II. Педагогические темы

- А. Н. Колмогоров. О преподавании начального курса геометрии (март 1948 г.).
- И. К. Андронов. Реформа математического образования (март 1952 г.).
- А. И. Маркушевич и П. Я. Дорф. Политехническое обучение на уроках математики (октябрь 1952 г.).
- П. А. Ларичев. Проект новой программы математики в школе (декабрь 1952 г.).
- Т. Гоманов и Гайдуков. Преподавание элементов высшей математики в Суворовском училище (май 1953 г.).
- Н. Ф. Четверухин. Идеологические вопросы в курсе геометрии (апрель 1954 г.).
- П. С. Александров. Некоторые вопросы преподавания математики в школе (февраль 1955 г.).
- Я. С. Дубнов. Тригонометрия в школьном курсе геометрии (январь 1956 г.).
- А. И. Маркушевич. Какой должна быть наша школа? (март 1957 г.).
- Н. Я. Виленкин. Преподавание алгебры в средней школе в связи с введением элементов высшей математики (сентябрь 1957 г.).
- Р. Л. Добрушин. Элементы теории вероятностей в курсе средней школы (январь 1958 г.).

III. Методические темы

- Г. А. Владимиров. Каким должен быть чертеж геометрической фигуры? (ноябрь 1950 г.).
- А. Г. Школьник. Натуральные тригонометрические функции (март 1954 г.).
- А. Г. Курош. О равносильности уравнений (сентябрь 1954 г.).

¹⁾ См. стр. 212—214 настоящего сборника.

- А. М. Фетисов. Анализ систем изображений пространственных фигур (октябрь 1954 г.).
- В. И. Левин. Элементарные функции в средней школе (октябрь 1955 г.).
- А. И. Маркушевич. Преподавание комплексных чисел в школе (октябрь 1955 г.).
- М. А. Знаменский. Задачи прикладного характера (октябрь 1955 г.).
- А. И. Маркушевич. Функции и производные в курсе средней школы (ноябрь 1955 г.).
- Я. С. Дубнов. Метод параллельных сечений в теории площадей и объемов (февраль 1956 г.)¹⁾.
- Н. Ф. Четверухин. Геометрические построения и изображения фигур (сентябрь 1956 г.).
- А. И. Фетисов. Необходимые и достаточные условия в практике школьного преподавания (февраль 1957 г.).

IV. Исторические темы

- Г. Ф. Рыбкин. Мировоззрение М. В. Остроградского (ноябрь 1951 г.).
- А. П. Юшкевич. Работы среднеазиатских математиков в средние века (апрель 1952 г.).
- М. Я. Выгодский. Исторические сведения по математике в курсе средней школы (март 1955 г.).
- И. Г. Башмакова. Задачи древности. Неразрешимые задачи (декабрь 1957 г.).

V. Критика учебников и других пособий

Обсуждались следующие книги:

- А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Учебник тригонометрии (май 1948 г.).
- Сборники задач, предлагавшихся на экзаменах при поступлении в вузы: 1) П. С. Моденов, 2) К. У. Шахно, 3) коллектив авторов под ред. М. Я. Выгодского (март 1951 г.).
- «Энциклопедия элементарной математики», т. I, II, III (май 1952 г.).
- С. А. Пономарев и Н. И. Сырнев, Задачник по арифметике (докл. Н. А. Менчинская и С. А. Пономарев). (февраль 1954 г.).
- Журнал «Математика в школе» (докл. А. Н. Барсуков, декабрь 1954 г.).
- Новые учебники математики (докл. Н. Н. Никитин, А. И. Фетисов, С. Н. Новоселов, Н. М. Бескин, Н. Я. Верченко, декабрь 1955 г.).
- В апреле 1956 г. обсуждался план изданий Учпедгиза (докл. С. А. Пономарев).

¹⁾ См. стр. 214 настоящего сборника.

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ Я. С. ДУБНОВА В СЕКЦИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Яков Семенович Дубнов был членом бюро секции с начала ее организации до последних дней своей жизни. За все десять лет существования секции он не пропустил ни одного общего заседания, ни одного заседания бюро. Занятый большой литературной работой и чтением лекций, он уделял много времени и энергии делу улучшения преподавания математики в школе, привитию математической культуры. Его выступления всегда были принципиальны, оригинальны, критика объективной; они отражали большое внимание к вопросу общего образования. Я. С. часто говорил, что наши деяния отражаются на судьбе миллионов учащихся.

Общее собрание секции не раз выражало пожелание, чтобы тезисы докладов на ее заседаниях предварительно представлялись докладчиками для распространения до заседания. Но это выполнял только один Я. С. Дубнов, вовремя присылая необходимые тексты. Приводим два таких текста (к докладам: 20 января 1955 г. «Величина и число» и в феврале 1956 г. «Метод параллельных сечений в теории площадей и объемов»).

П. Я. Дорф

Величина и число

Изложение в школе последовательных этапов эволюции числа, по-видимому, стабилизировалось. Никто не пытается теперь развертывать в школе строго научную теорию вещественного (а позже — комплексного) числа; вместе с тем известны методически приемлемые суррогаты этой теории. Шагом вперед является тенденция лучших учебников идти к понятию вещественного числа не только изнутри арифметики, но отправляясь также от задач *измерения*. И хотя практически пользуются всегда измерением отрезков, но предпочитают говорить об измерении «величин». В противоположность «числу», «величина» не только не стабилизировалась в преподавании, но этот термин нельзя даже считать удовлетворительно определенным. Старое определение («то, что может быть больше и меньше») явно недостаточно. Под такое определение подходят и красота, аппетит, познания ученика в алгебре и т. п., которые, однако, не являются величинами, так как не допускают точных числовых оценок. Законно оспаривают также применимость термина «величина» к температуре, высоте местности,

потенциалу и т. п. вследствие существующей здесь зависимости числовых оценок от произвола в выборе нулевой точки (поэтому, например, не имеет прямого физического смысла сумма температур). Конечно, признак «больше — меньше» является существенным для величины (поэтому комплексные числа не образуют величины; тем не менее говорят часто «комплексная величина», «мнимая величина», «векторная величина», подтверждая этим сбивчивость самого понятия), но не единственным.

Современная научная теория величины покоится на аксиоматике этого понятия, содержащей не только свойства сравнимости ($>$, $=$, $<$), но и сложения — вычитания, а также непрерывности. Один из вариантов такой аксиоматики (10 аксиом!) можно найти в статье А. Н. Колмогорова «Величина» во 2-м издании БСЭ (он воспроизведен в «Теоретической арифметике» В. М. Брадиса). Конечно, не может быть речи о том, чтобы эту сложную аксиоматику излагать в школе. Да и стоит ли создавать обобщающее понятие для трех случаев (длина, площадь, объем), встречающихся в геометрии? Другое дело — физика, но и для ее целей нет надобности в обобщении, а достаточно каждый раз описывать процесс измерения, т. е. для каждого случая давать «конструктивное» определение физической величины.

В геометрии подчеркиваются (и это делают почти все учебники) «дескриптивные» (описательные) определения — с помощью свойств, которые мы желаем приписывать числу, измеряющему отрезок, или угол, или плоскую фигуру и т. п. Например, в случае прямолинейных отрезков *мера* (длина) должна обладать свойствами: 1) инвариантности относительно движений; 2) аддитивности (мера отрезка равна сумме мер его частей); 3) однозначной определенности после того, как один отрезок выделен в качестве эталона. Доказательство эквивалентности и дескриптивного определения длины вряд ли может быть проведено в школе.

Дескриптивное определение важно потому, что в новых вопросах измерения именно оно является рабочим аппаратом. Это видно на примере, выходящем за рамки школьной математики: для некоторых двухпараметрических множеств прямых на плоскости (таким будет, например, множество всех прямых, пересекающих данный отрезок) удастся установить *меру* (числовую оценку), удовлетворяющую трем требованиям, аналогичным тем, которые приведены выше в качестве дескриптивного определения длины отрезка. Оказывается, например, что мера множества прямых, пересекающих данный выпуклый контур, пропорциональна длине этого контура. Вопросы этого рода (установление меры для неточечных множеств) составляют содержание новой ветви геометрии — так называемой *интегральной геометрии*, развившейся в XX в. и нашедшей разнообразные приложения, в том числе и к теплотехнике (лучистая энергия). У истоков этой дисциплины стоят старые задачи о «геометрических вероятностях» (такова классическая задача Бюффона о бросании иглы, позволяющая экспериментально находить приближения числа π). На этом примере видно, что *работают именно свойства меры, а не аксиомы величины*.

Следует прийти к выводу, что термин «величина» отживает свой век, подобно тому как не столь давно стал исчезать из математической речи термин *количество* (говорили: «мнимое количество», «бесконечно малое количество» и т. п.; в общенаучной терминологии, например в философской, «количество», конечно, сохраняется). Косвенное подтверждение этому прогнозу докладчик видит в обозначившейся у нас тенденции заменять женский род средним в таких выражениях, как «неизвестная» (подразумевается величина), «переменная» (величина); вместо этого говорят «неизвестное», «переменное».

[Примечание после дискуссии. Докладчик признает убедительными возражения Н. Н. Николаевой, указавшей, что в арифметике V класса трудно было бы обойтись без термина «величина» (пропорциональные величины). Но на этой «до-логической» стадии обучения, разумеется, вполне допустимо, не пытаясь дать общее определение, ограничиться примерами (длина, вес, стоимость и т. д.) и признаком «больше — меньше».]

Метод параллельных сечений в теории площадей и объемов (тезисы)

1. Наряду с перестройкой учебного плана и программ применение к крупным разделам курса новых методов изложения является мощным резервом в деле улучшения преподавания (в частности, экономии времени и сил школьников).

2. В качестве средства углубить и одновременно облегчить усвоение теории площадей и объемов в докладе рекомендуется метод параллельных сечений (Кавальери). Историческая справка. Формулировка «правил Кавальери» (широкого и узкого). Соответствующие формулы интегрального исчисления. Опасности, связанные с неправильным пониманием метода.

3. Метод параллельных сечений в планиметрии: 1) подготавливает к усвоению этого метода в применении к более сложной стереометрической ситуации; 2) вскрывает наглядное содержание простейших формул для площадей многоугольников; 3) побуждает каждый раз исследовать функциональную зависимость сечения от уровня секущей; 4) освещает общие вопросы изменения площади при преобразованиях осевого сжатия в геометрии; 5) позволяет решать новые задачи (в математическом кружке: площадь эллипса, фигур, ограниченных дугами параболы, циклоиды и др.).

4. Особенности теории объемов (теоремы Дена и Зюсса). Классификация тел по закону изменения площади сечения. Обзор вывода обязательных формул и некоторых новых (клин, обелиск, сегмент параболоида и др.).

5. Отражение метода в литературе учебной и педагогической. Являются ли доказательства с помощью метода параллельных сечений менее строгими, чем обычные? Какие предложения геометрии можно принимать без доказательства?

ВСЕСОЮЗНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ВЫСШИХ ТЕХНИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СССР

И. Н. Бронштейн

(Москва)

Предпоследнюю неделю мая 1959 г. можно считать одной из важных дат математической жизни в СССР. В эти дни в актовом зале Московского энергетического института впервые собрались преподаватели математики втузов нашей страны, чтобы поделиться опытом своей работы и своей тревогой за состояние математической подготовки инженеров. Формально это собрание скромно называлось «Всесоюзное совещание заведующих кафедрами высшей математики втузов», созданное Министерством высшего образования СССР (МВО), но по существу это было первым съездом преподавателей втузов с очень широким представительством: кроме заведующих кафедрами (их было около 250), на совещании было официально зарегистрировано такое же число рядовых преподавателей, а фактически на отдельных заседаниях присутствовало до 800—900 человек.

Всю огромную работу по подготовке, созыву и успешному проведению совещания осуществил Организационный комитет; в него вошли профессора и преподаватели московских втузов: А. Ф. Бермант (председатель), А. Ф. Леонтьев (зам. председателя), Эм. Апарисно, П. А. Безсонов, Н. В. Ефимов и Л. З. Румшинский; комитету активно помогали в его работе и другие преподаватели. Подлинной душой совещания, его инициатором, организатором и руководителем был Анисим Федорович Бермант — основатель и постоянный председатель научно-методического семинара преподавателей математики московских втузов; в процессе работы семинара возникла и развилась идея о созыве совещания¹⁾.

В первый день совещания состоялись доклады крупных советских математиков, посвященные разделам математики, которые особенно развились и получили широкие технические применения в последнее время (А. Н. Колмогоров «Роль вероятностных и статистических методов в технике и преподавание элементов теории вероятностей и

¹⁾ Об этом семинаре см. «Математическое просвещение», вып. 1, стр. 183—186 и вып. 4, стр. 227—231.

статистики во втузе», *Л. А. Люстерник* «Теория и практика в современной математике»¹⁾, *А. А. Ляпунов* «Требования, предъявляемые к преподаванию математики во втузе в связи с развитием кибернетики и машинной математики»). Второй день был посвящен сообщениям видных представителей прикладных специальностей о требованиях, предъявляемых ими к математической подготовке инженеров (механика — *Л. И. Седов* и *Г. Г. Черный*, теория упругостей — *В. В. Соколовский*, энергетика — *В. А. Веников*, теория автоматического регулирования — *Я. З. Цыпкин*; общий доклад «Математическая подготовка инженеров» сделал *Г. Ю. Джанелидзе*).

Большая часть третьего дня совещания была посвящена центральному вопросу — «Основные задачи математической подготовки инженера». Доклад на эту тему *А. Ф. Берманта* продолжался 2¹/₂ часа без перерыва при напряженном внимании всего зала — настолько своевременно и остро были поставлены волновавшие всех вопросы. Этот доклад был положен в основу проекта общей резолюции. Затем состоялись доклады *Г. Ф. Рыбкина* «Об издании учебной и научной литературы по математике» и *А. Ф. Леонтьева* «О постановке научной работы на кафедре высшей математики во втузе».

Началась общая дискуссия, которая продолжалась еще в течение двух дней; в ней приняло участие свыше 50 человек. Во время дискуссии состоялись выступления министра МВО *В. П. Елютина* и других руководящих работников МВО. Совещание не было разделено на одновременно работающие секции, как это часто делается на конференциях с насыщенной повесткой — на этот раз всё, что происходило на совещании, было важным для каждого его участника, и все заседания были пленарными. Для того чтобы хоть отчасти сгруппировать выступления участников по важнейшим темам, заседания в четвертый и пятый день (два утренних и два вечерних) начинались небольшим вступительным докладом. Эти доклады были: 1) «Программы общего курса, дополнительных и факультативных курсов и вступительных экзаменов; учебная литература» (*П. А. Безсонов*), 2) «Вычислительный практикум в курсе математики во втузе, учебная и научная работа вычислительных центров МВО СССР» (*Л. З. Румицкий*), 3) «Научно-методическая работа и связь курса математики с другими дисциплинами и производством» (*П. И. Романовский*), 4) «Преподавание математики в учебных заведениях различных типов (заочных, вечерних, смешанных)» (*Л. Я. Цлаф* и *Г. Л. Луц*).

Изложить здесь даже вкратце содержание докладов и выступлений невозможно²⁾; многие выступления были очень содержательными, были и очень спорные высказывания. По некоторым вопросам вспыхивала

¹⁾ Этот доклад будет напечатан в следующем выпуске «Математического просвещения».

²⁾ Стенограммы докладов и изложения выступлений на совещании будут опубликованы в специальном сборнике, который готовится к печати Министерством высшего образования.



В зале заседания Всесоюзного совещания.



Президиум совещания. В центре -- А. Ф. Бермант (стоит).

острая полемика. Так, читателям «Математического просвещения», вероятно, будет интересно узнать, что вопрос об объеме знаний по математике, требуемых втузами от оканчивающих среднюю школу, вызвал большие разногласия. Некоторые из выступавших считали, что в программу средней школы нецелесообразно вводить элементы высшей математики («Пусть научат школьников хорошо решать задачи по стереометрии с применением тригонометрии, и мы за это спасибо скажем, а что такое интеграл, мы и сами сможем объяснить!»). Но эта непрогрессивная точка зрения не получила поддержки на совещании и не нашла отражения в резолюции.

И докладчики, и выступавшие указывали на то, что, к сожалению, математика во втузах не заняла еще того положения основной, профилирующей дисциплины, которое она должна занимать в образовании инженера.

На заключительном заседании в последний день совещания состоялось принятие резолюций. Проекты резолюций были заранее подготовлены Оргкомитетом и розданы всем участникам совещания. Всего было выработано 8 резолюций — одна общая и семь специальных: 1) «О программах по курсу математики во втузах», 2) «О требованиях по математике, предъявляемых на приемных экзаменах в технические и экономические вузы», 3) «Об учебной литературе», 4) «О вычислительном практикуме по курсу высшей математики и о математической лаборатории», 5) «О специальном математическом практикуме по основам современной машинной математики и об учебно-научных вычислительных центрах МВО СССР», 6) «О научно-методической и научной работе на кафедрах математики и о связи со специальными кафедрами», 7) «О преподавании математики в вечерних и заочных втузах».

Обширные тексты резолюций помещены (с некоторыми сокращениями) в журнале «Успехи математических наук»¹⁾; поэтому мы приводить их здесь не будем, а помещаем ниже некоторые приложения к резолюциям 4) и 5), не напечатанные в журнале.

Детальное обсуждение многочисленных изменений и дополнений к резолюциям, предлагаемых участниками совещания, заняло несколько часов; обсуждение многих пунктов снова переходило в продолжение дискуссий. В условиях многочасового заседания провести эту заключительную работу было очень непростой задачей; она потребовала от председательствующего А. Ф. Берманта исключительного напряжения.

Наконец резолюции были приняты, и деловая часть совещания окончилась. А. Ф. Бермант обратился к участникам совещания с большой заключительной речью. Подводя итоги сделанной работе, он призвал всех участников совещания содействовать проведению в жизнь принятых решений. Пожелав всем здоровья и успехов в работе, он в торжественной обстановке закрыл совещание.

¹⁾ УМН, 14, вып. 5, 1959, стр. 242—256. Полный текст резолюций и приложений к ним отпечатан МВО в виде специальной брошюры (М., 1959, 36 стр.).

* * *

Через несколько дней газеты сообщили о смерти Анисима Федоровича Берманта. В некрологе, напечатанном в «Успехах математических наук»¹⁾, говорится:

«Глубоко веря в коллектив и силу коллективного творчества, А. Ф. Бермант придавал большое значение проводимому совещанию. Он отдал ему весь свой талант блестящего организатора, руководил всем ходом его работ, вникая во все детали и мелочи. Не щадя здоровья, он отдал этому важному общественному делу все свои силы.

23 мая Анисим Федорович произнес проникновенное заключительное слово председателя совещания, а рано утром 26 мая 1959 г. его уже не стало».

Участники совещания не подозревали о том, что жизнерадостный, полный энергии и оптимизма А. Ф. Бермант был очень больным человеком. Последнее напряжение стоило ему жизни. Это была смерть на посту.

ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕЗОЛЮЦИЯМ СОВЕЩАНИЯ

К резолюции № 4

№ 1. ПРОГРАММА РАЗДЕЛА

«ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

(на 20—30 часов)

1. Правила вычислений с приближенными числами

Абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел. Правила арифметических действий с приближенными числами. Правила верных знаков. Оценка погрешности функции по данным погрешностям аргументов. Вычисления с заранее заданной погрешностью результата.

2. Строение таблиц функций, табличные разности

Таблицы с постоянным шагом. Точность таблиц. Табличные разности разных порядков, их связь с дифференциалами. Погрешности табличных разностей, понятие о практически постоянных табличных разностях. Применение табличных разностей для обнаружения ошибок при составлении таблиц.

Линейная интерполяция, ее погрешность, условия ее применимости. Понятие об обратной линейной интерполяции в таблице с постоянным шагом.

3. Параболическая интерполяция функций

Постановка общей задачи параболической интерполяции. Теорема существования и единственности интерполяционного многочлена. Интерполяционная формула Лагранжа. Понятие о погрешности параболической интерполяции. Интерполирование в таблице с постоянным шагом. Интерполяционные формулы Ньютона, понятие о выборе интерполяционной формулы.

¹⁾ УМН 14, вып. 5, стр. 121.

4. Численное решение уравнений и систем

Приближенное решение уравнения с одним неизвестным. Уточнение от деленного корня методом проб, методом хорд и методом касательных. Оценка погрешности полученного приближения. Понятие о сходимости методов хорд и касательных. Метод итерации решения уравнения. Метод итерации решения системы двух уравнений с двумя неизвестными. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса (последовательного исключения неизвестных).

5. Приближенное вычисление определенного интеграла

Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций и параболических трапеций (Симпсона). Понятие о точности этих формул. Организация расчета и контроль вычислений.

6. Численное решение дифференциальных уравнений

Численное решение дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера и каким-либо более эффективным методом (Милна, Адамса—Крылова, Рунге—Кутта). Организация расчета и контроля в методе Милна (или в другом выбранном методе).

7. Понятие о номографии

Ознакомление с типами номограмм и с их использованием. Знакомство с функциональными сетками.

Примечание. В зависимости от профиля института или факультета в программу могут быть включены дополнительные вопросы, например решение систем линейных уравнений методом итераций, гармонический анализ, обработка экспериментальных данных и т. д.

№ 2. ПРИМЕРНЫЙ СПИСОК ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Элементы приближенных вычислений. Табулирование функции по заданной формуле с заданной точностью и с использованием простейших вычислительных средств (счетной линейки, клавишной вычислительной машины и таблиц с применением линейной интерполяции) — 6—8 час.
2. Численное решение уравнений (способ хорд и касательных или способ итераций) — 2 часа.
3. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса (последовательного исключения неизвестных) — 4 час.
4. Приближенное вычисление определенных интегралов — 2—4 час.
5. Численное интегрирование дифференциальных уравнений методом Милна (или Рунге—Кутта, или Адамса—Крылова и т. п.) — 4—6 час.
6. Употребление номограмм различных типов — 2—4 час.

Дополнительные лабораторные работы
(в зависимости от специальности втуза и факультета):

- а) Решение систем линейных уравнений методом итераций — 2 час.
- б) Параболическая интерполяция и табличное дифференцирование — 2 час.
- в) Вычисление значений функций и интегралов с помощью степенных рядов — 2 час.
- г) Приближенный гармонический анализ при помощи шаблонов или прибора — 2 час.
- д) Обработка экспериментальных данных; расчет средних, дисперсии, коэффициентов корреляции и др. — 2—4 час.

- е) Подбор эмпирических формул по способу наименьших квадратов — 4 час.
ж) Работа на планиметрах, интегралах и других малых математических приборах — 2 час.

Примечание. Обратить особое внимание на самостоятельное составление студентами схемы расчета, выбор ими порядка записи результатов вычислений и оформление бланка расчета. Рекомендовать предоставление студентам самостоятельности в выборе шага расчета (в работах 4, 5) или выдачу им задач, требующих изменения первоначального (заданного) шага расчета. Обратить внимание на контроль вычислений в каждой лабораторной работе, добиваясь уверенности студентов в правильности результата проведенного расчета.

№ 3. ПРОЕКТ ПОЛОЖЕНИЯ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ВТУЗА

1. Математическая лаборатория втуза организуется при кафедре высшей математики и руководствуется в своей деятельности «Положением», утвержденным директором института.

2. Основные задачи лаборатории:

а) Проведение вычислительного практикума по основному курсу высшей математики и обучение студентов практическим навыкам в организации и проведении расчетных работ.

б) Ознакомление всех студентов с основными вычислительными средствами (математические таблицы, счетные линейки, клавишные вычислительные машины разных типов и др.).

в) Предоставление студентам старших курсов, аспирантам и сотрудникам института необходимых вычислительных средств для проведения расчетных работ (курсовое и дипломное проектирование, научно-исследовательские работы).

3. Организация работы лаборатории.

Лабораторные занятия по математическому практикуму проводятся по расписанию, согласованному с расписанием занятий по курсу высшей математики. Методическая разработка лабораторных занятий составляется кафедрой высшей математики. Занятия проводятся в подгруппах.

В часы, свободные от лабораторных занятий по расписанию, лаборатория предоставляет вычислительные средства и методические консультации студентам, аспирантам и сотрудникам института.

4. Оборудование и штаты.

а) В основное оборудование лаборатории входят электрические клавишные вычислительные машины, логарифмические линейки и математические таблицы в количествах, указанных в Приложении № 4¹⁾.

Примечание. В зависимости от профиля втуза лаборатория оснащается специальным оборудованием, например гармоническими анализаторами, малыми электронными математическими машинами типа МН-7 и т. д.

б) Штат лаборатории включает: 1 начальника лаборатории, 1—2 старших лаборантов, 2—4 лаборантов.

Примечание. По крайней мере один из лаборантов должен иметь специальное техническое образование по ремонту вычислительных машин.

¹⁾ См. брошюру, указанную в сноске на стр. 218.

К резолюции №5

№ 1. ПРОЕКТ ПОЛОЖЕНИЯ
О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЦЕНТРЕ ВТУЗА (В. Ц.)

Задачи и характер работы

1. В. Ц. является учебно-научной лабораторией общеполитического характера, организованной при кафедрах вычислительной техники и высшей математики.

2. Основными задачами В. Ц. являются:

а) Введение в подготовку инженера изучения методов машинной математики и основ вычислительной техники, улучшение качества подготовки специалистов по вычислительной технике и другим специальностям, требующим высокой физико-математической подготовки.

б) Внедрения в научные исследования современных вычислительных средств. Обслуживание вычислительной работой научно-исследовательской деятельности кафедр института.

3. В. Ц. совместно с кафедрами вычислительной техники и высшей математики проводит для преподавателей и научных сотрудников института доклады, семинары и консультации по вопросам теории и практики эксплуатации вычислительных машин, возможности использования вычислительной техники в научных исследованиях.

4. На В. Ц. организуется вычислительный практикум по специальным программам для студентов отдельных специальностей. Эта работа увязывается с работой математической лаборатории кафедры высшей математики, в которой проводится практикум по основному курсу высшей математики для всех студентов.

5. Выполнение вычислительной работы для кафедр института В. Ц. проводит как в порядке хозяйственного, так и в порядке государственного.

6. Ведение научной работы на В. Ц. организуется в соответствии со специальным планом.

7. Вся деятельность В. Ц. направляется научно-техническим советом, составленным из представителей: научного и учебного управлений института, кафедр вычислительной техники и высшей математики. Руководство оперативной работой осуществляется начальником В. Ц.

8. Материально-техническое снабжение и финансово-хозяйственная деятельность В. Ц. осуществляется через соответствующие отделы института.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНГРЕСС В ЭДИНБУРГЕ (ВПЕЧАТЛЕНИЯ УЧАСТНИКА)

В. В. Немыцкий
(Москва)

От редакции

Как уже сообщалось в «Математическом просвещении»¹⁾, с 14 по 21 августа 1958 г. в Эдинбурге (Шотландия) состоялся очередной Международный математический конгресс. Советская делегация на конгрессе состояла из 32 человек. В повестке дня конгресса было объявлено 22 обзорных «часовых» доклада; 5 докладов представителей СССР (А. Д. Александров, Н. И. Ахиезер, Н. Н. Боголюбов, И. М. Гельфанд и Л. С. Понтрягин), 5 докладов ученых из США (С. Ц. Клини, Н. Е. Стиррод, Г. Е. Уленбек, В. Феллер и С. Эйленберг), 4 доклада французских математиков (А. Гротендик, А. Картан, Р. Том и К. Шевалле), 3 доклада математиков из ФРГ (Г. Виланд, К. Л. Зигель и Ф. Е. П. Хирцебрух), 2 доклада английских математиков (К. Ф. Рот и Г. Темпл), а также доклады Л. Гординга (Швеция), К. Ланцоша (Ирландия) и М. М. Шифера (Голландия). По специальностям эти доклады распределялись так: 6 докладов относились к алгебраической геометрии, топологии и теории функций многих комплексных переменных, которые представляют собой сейчас очень тесно связанный комплекс вопросов (доклады Гротендика, Картана, Стиррода, Тома, Хирцебруха и Эйленберга); 4 доклада относились к вопросам приложений математики (Боголюбова, Понтрягина, Темпла и Уленбека); по два доклада представляли функциональный анализ (Ахиезер и Гельфанд), теорию чисел (Зигель и Рот), теорию дифференциальных уравнений в частных производных (Гординг и Ланцош) и по одному — геометрию (А. Д. Александров), алгебру (Виланд), теорию вероятностей (Феллер), теорию функций комплексного переменного (Шифер), теорию групп Ли (Шевалле) и математическую логику (Клини). Впрочем, состоялись не все объявленные доклады.

Следует сказать, что слова «обзорные доклады» здесь следует понимать не так, как их понимали, например, на Всесоюзном съезде математиков. «Часовые» доклады представляли собой выступления крупных математиков, которые были приглашены оргкомитетом съезда выступить на любую тему по своему желанию. Этими докладами начинались и утреннее, и дневное заседания конгресса; секции в это время не работали, и каждый из участников мог пойти на один из двух или трех «часовых» докладов, которые читались одновременно в разных аудиториях. Для сравнения заметим, что предыдущий Международный математический конгресс в Амстердаме (1954 г.) открылся докладом Дж. Неймана (США), а завершился докладом А. Н. Колмогорова (СССР),

¹⁾ Выпуск 4, стр. 94. См. также «Успехи математических наук» 14, 1959, вып. 1, стр. 249—259 и вып. 2, стр. 235—252.

и эти доклады читались без параллельно идущих докладов других математиков. В Эдинбурге подобных докладов совсем не было.

После «часовых» докладов участники расходились по секционным заседаниям. Первоначально предполагалось, что работать будут 8 секций конгресса; на самом деле их было 13: I) *Логика и основания математики*. IIa) *Алгебра*, IIб) *Теория чисел*. IIIa) *Классический анализ*, IIIб) *Функциональный анализ*. IV) *Топология*. Va) *Алгебраическая геометрия*. Vб) *Дифференциальная геометрия*. VI) *Теория вероятностей и статистика*. VIIa) *Прикладная математика*, VIIб) *Теоретическая физика*. VIII) *Численный анализ*. VIII) *История и преподавание*.

Заседания секций начинались с обзорных получасовых докладов, также читавшихся по приглашению оргкомитета съезда. Всего было объявлено 40 таких докладов; из них 7 докладов советских математиков (*В. И. Арнольд, Б. В. Гнеденко, М. Г. Крейн, Б. В. Линник, А. А. Марков, Д. Е. Меншов и С. Н. Черников*; впрочем, не все эти доклады состоялись). Затем шли 15-минутные сообщения, которые читались уже без приглашения (и даже без всякого контроля) оргкомитета: всякий, своевременно заявивший доклад и внесший пять фунтов стерлингов, получал право на свои 15 минут.

Вопросами преподавания математики занималась секция VIII. Здесь было объявлено меньшее число докладов, чем по другим секциям; получасовой доклад по вопросам преподавания математики был объявлен лишь один (известного французского психолога *Пиаже*), но и он не состоялся. В качестве типичных 15-минутных докладов можно указать, например, два доклада о введении преподавания элементов теории вероятностей и статистики в программу средней школы [докладчики: *Ньене* (Норвегия) и *Бунт* (Голландия)]; последний сообщил об экспериментальной работе, проведенной в голландских школах] или доклады о техническом образовании в Англии, о преподавании геометрии в итальянских школах. Три дня были посвящены обсуждению докладов, представленных Международной комиссией по математическому образованию; доклады на тему об обучении детей до 15-летнего возраста, о научных основах математики в средней школе и о разных методах обучения в начале курса геометрии сделали видные ученые *Фер* (США), *Бенке* (ФРГ) и *Фрейденталь* (Голландия). Одно заседание было посвящено заслушиванию 5 докладов, представленных Американским комитетом по математическому образованию; среди этих докладов можно отметить сообщение о преподавании математики по телевизору, сделанное известным математиком *К. Аллендорфом*.

Летом 1958 г. в старинной столице Шотландии Эдинбурге состоялся Международный математический конгресс. В Эдинбурге почти нет новых, современных зданий, и работа конгресса происходила в ряде старинных дворцов, зданий университета и Шотландской Академии наук (приводим названия некоторых из этих помещений: McEwan Hall, Old College, Royal Scottish Museum).

Собралось более 1700 математиков со всех частей света с явным преобладанием англосаксов: в работах конгресса участвовало 320 представителей США и 360 англичан. Из Советского Союза было 32 ученых.

Казалось бы, что при 1700 членах конгресса и 13 секциях на заседаниях каждой секции должно было присутствовать около 100 участников; однако, как правило, на секционных докладах было не более 20—30. Очевидно, многие члены конгресса придерживались принципа, высказанного еще в 1928 г. французским академиком А. Данжуа: «конгрессы существуют, чтобы посмотреть чужую страну»

и показать ее своей жене». Действительно, на конгрессе было много жен и детей; для них оргкомитет разработал обширную программу многочисленных экскурсий, начиная от посещения шоколадной фабрики и кончая просмотром драгоценностей, надетых на Марию Стюарт в день казни.

Конгресс открылся 14 августа 1958 г. в 10 часов утра в McEwan Hall — круглом здании, напоминающем по своей архитектуре цирк, и специально сооруженном для торжественных собраний. Он начался речами о величии и о значении математики для человечества; в эти речи ораторы вклинивали остроты и шутки, и зал разражался веселым хохотом.

После короткого перерыва были вручены премии молодым математикам, которые, по мнению специального международного жюри, получили наиболее замечательные результаты за последние четыре года, прошедшие со времени предыдущего конгресса. От Советского Союза в международное жюри входил А. Н. Колмогоров. Премией были удостоены К. Ф. Рот (Лондон), решивший до конца одну классическую проблему теории диофантовых приближений¹⁾, и Р. Том (Страсбург), работающий в «модной» области алгебраических методов топологии. Работы молодых лауреатов представлялись «старыми» математиками — членами жюри: англичанином Г. Давенниортом и Г. Хопфом (Швейцария). Г. Хопф в своей речи отметил, что сведение геометрических проблем к абстрактной алгебре является своего рода поветрием современной математики; однако он выразил уверенность, что алгебре не удастся полностью поглотить геометрию.

Всё же «экспансия» алгебры, в самом деле, по-видимому (например, если судить по конгрессу), представляет собой реальную «опасность» для остальных математических методов. Ряд докладов, например доклад А. Картана «Проблемы функций многих комплексных переменных», не имеющий по названию прямого отношения к алгебре, по существу касался чисто топологических и алгебраических вопросов. Топология, алгебра и алгебраическая геометрия — так можно было бы написать на знамени Эдинбургского конгресса. Большинство обзорных (часовых) докладов было явным образом посвящено этим наукам; однако и в остальных докладах, по-видимому, было немало алгебры и топологии.

Такое положение алгебры и топологии на конгрессе всё же представляется отражением мировой математики в несколько искривленном зеркале. Это можно заключить хотя бы потому, что такие перспективные и широко применяемые области математики, как машинная математика или теория информации, были весьма слабо представлены на конгрессе.

Часто спрашивают, были ли на конгрессе выдающиеся доклады, которые привлекли внимание многих математиков? Мне кажется, что

¹⁾ См. статью А. О. Гельфонда, напечатанную в вып. 2 «Математического просвещения», стр. 48—49.

эпитет «выдающийся» неприменим ни к одному из прочитанных докладов. В связи с этим любопытно отметить, что многие известные математики, присутствовавшие на конгрессе, не читали докладов — Р. Курант, С. Лефшец, В. Ходж, Ж. Фавар, С. Мандельброт и другие, а, например, А. Зигмунд на прямой вопрос, почему он не читает доклада, прямо заявил: «Я много уже их читал, пусть теперь выступает молодежь». Молодежь и выступала, причем далеко не всегда с интересными докладами.

Чтение и заслушивание докладов отнюдь не должны рассматриваться как единственная задача конгресса. Основной задачей была организация личного научного общения между математиками различных стран. Это общение было налажено неплохо, тут были применены самые разнообразные формы, начиная от научных дискуссий и кончая приемами. Вспоминаю, например, научную дискуссию, организованную С. Лефшецем по качественной теории дифференциальных уравнений, или дискуссию о проблемах изучения свойств дзета-функции.

Премов и встреч было много. В частности, каждый член конгресса в своем ящике (члены конгресса имели свои почтовые ящики с определенным номером) обнаружил большой конверт, в котором была вложена изящно оформленная карточка, где значилось, что лорд-мэр Эдинбурга приглашает членов конгресса в свою загородную резиденцию. Большинство поехало. Прием происходил в обширном парке, разбитом вокруг старинного дворца, в котором в XVI—XVII в. жил Нэпер — изобретатель логарифмов. На обширных полянах, покрытых прославленными английскими газонами и обсаженных огромными липами, группами располагались члены конгресса. Вот Д. Е. Меньшов оживленно беседует с А. Данжуа, О. А. Олейник окружена итальянскими специалистами в области дифференциальных уравнений. А. Г. Курош, у которого был «план» познакомиться с несколькими десятками членов конгресса (это — лишь часть алгебраистов, бывших на конгрессе), уже нашел очередную жертву своего ненасытного математического темперамента и любопытства.

Советские алгебраисты и их работы настолько популярны за рубежом, что А. Г. Курошу уже не раз приходилось объяснять, почему не приехали С. Н. Черников, Л. А. Скорняков или А. И. Ширшов. Я тоже от С. Сансоне и Р. Конти не раз слышал лестные отзывы о высоком уровне советской математики.

Кроме математических разговоров, для развлечения собравшихся играл шотландский оркестр волюнок, и музыканты в красочных костюмах дефилировали вдоль фасада дворца.

Вторая обширная встреча была организована в виде экскурсии. Было арендовано два парохода, которые отправились в плавание по реке Кляйд с выходом в Ирландское море. Скучиватые берега с аккуратными городками и зелеными холмами не были настолько интересны, чтобы отвлекать от бесед. Там мы познакомились с Р. Курантом, который, как оказалось, хорошо осведомлен о советских

научных делах. Помимо официальных встреч было много и неофициальных: Н. К. Бари и Д. Е. Меньшов за столиком кафе с удовольствием и пользой поделились мыслями с известным специалистом по теории тригонометрических рядов А. Зигмундом и его молодыми учениками. Несколько молодых французских математиков сопровождало нас при прогулке по окрестностям Эдинбурга.

Вечером в нашем общежитии были беседы с американскими математиками Маркусом и Пьекшото по поводу текущих проблем качественной теории дифференциальных уравнений.

Во всех этих беседах мы видели высокое уважение к советским ученым и к советской математике. Советская Страна всеми рассматривалась как центр мирового значения, из которого идут многие передовые идеи математики.

ОШИБКА КОШИ

Ныне от каждого студента второго курса требуется, чтобы он понимал, что сумма сходящегося ряда непрерывных функций не всегда есть функция непрерывная. Но в те времена, когда Коши опубликовал свой знаменитый «Алгебраический анализ» (1821 год), последнее обстоятельство еще не было выяснено. Вот что писал Коши по этому поводу (глава VI, § 1):

«Когда все члены ряда (I) содержат одно и то же переменное x , этот ряд сходится и его различные члены — непрерывные функции x в окрестности частного значения, приданного этому переменному, то s_n , r_n и s^1) также являются тремя функциями переменного x , из которых первая очевидно непрерывна по отношению x в окрестности частного значения, о котором здесь идет речь. Установив это, рассмотрим приращения, которые получают эти функции, когда x возрастает на бесконечно малую величину α . Приращение s_n будет для всех возможных значений бесконечно малой величиной, а также и [приращение — А. М.] r_n сделается нечувствительным вместе с α , если придать n значение весьма большое. Следовательно, приращение функции s может быть только бесконечно малой величиной. Из этого замечания немедленно вытекает следующее предложение:

Теорема 1. Когда различные члены ряда (I) суть функции одного и того же переменного x , непрерывные относительно этого переменного в окрестности частного значения, для которого ряд сходится, то сумма s также есть непрерывная функция x в окрестности этого частного значения».

Из этого рассуждения видно, как недостаточно точное и определенное использование понятия «бесконечно малое» привело Коши к ошибочной теореме. Заметим, что этой ошибки не пропустил тогда же один из самых внимательных читателей Коши — Абель. В примечании к своим «Исследованиям в ряде $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$ » он, цитируя эту теорему, продолжает:

«Мне кажется, что эта теорема имеет исключения. Так, например, ряд $\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \dots$ разрывен для каждого значения $\varphi = (2m+1)\pi$, где m — целое число. Известно, что существует множество рядов с аналогичным свойством».

А. М.

¹⁾ Частичная сумма, остаточный член и сумма ряда. — (А. М.)

НИКОЛАЙ БУРБАКИ¹⁾

П. Р. Халмош

(P. R. Halmos, США)

У него греческая фамилия, французская национальность и весьма любопытная история. Он один из самых влиятельных математиков XX в. О нем существует множество легенд, и количество их растет с каждым днем. Едва ли не каждый математик знает о нем несколько историй, а кто-нибудь, вероятно, и пополняет их запас. Во всём мире читают его и ссылаются на его труды. В Рио-де-Жанейро есть молодые люди, сформировавшиеся как математики почти исключительно благодаря его работам, и есть знаменитые математики в Беркли и Геттингене, считающие его влияние пагубным. Всюду, где собирается группа математиков, он находит себе и горячих сторонников и шумных противников. Однако самым удивительным является то обстоятельство, что он не существует.

Этот несуществующий француз с греческой фамилией — Николай Бурбаки. Дело в том, что Николай Бурбаки — это коллективный псевдоним неофициальной корпорации математиков. (Очаровательное французское название корпорации — «анонимное общество» — является здесь вполне подходящим.) Группа, выступающая под этим псевдонимом, создает всеобъемлющий трактат по математике, который освещает наиболее общие принципы, лежащие в основе математической науки, и завершится, по-видимому, изложением весьма специальных ее разделов. Начало этому было положено в 1939 г., с тех пор появилось уже 20 томов (почти 3000 страниц) монументальных работ.

Причины, по которым авторы называли себя *Бурбаки*, окутаны тайной. Есть основания думать, что этот выбор связан с именем офицера французской армии, игравшего некоторую роль во время Франко-прусской войны. Генерал Шарль-Дени-Сотэ Бурбаки был очень колоритной фигурой. В 1862 г. в возрасте 46 лет ему предложили стать королем Греции. Однако он отказался от этой возможности. Сейчас память о нем связана главным образом с его военными неудачами. В 1871 г. после бегства из Франции в Швейцарию с небольшими остатками своей армии он был там интернирован и пытался

¹⁾ «Nicolas Bourbaki» by Paul R. Halmos, Scientific American, май 1957 г., стр. 88—99.

застрелиться. Вероятно, генерал промахнулся, так как известно, что он дожил до почтенного возраста 83 лет. Говорят, что в Нанси ему поставлен памятник. Это дает возможность установить связь между ним и математиками, принявшими его имя, так как некоторые из них

в различное время были связаны с университетом Нанси.

В одной из легенд, окружающих имя Бурбаки, говорится, что приблизительно 25—30 лет назад в Высшей нормальной школе (где обучается большинство французских математиков) студентам-первокурсникам предлагали прослушать лекцию выдающегося приезжего ученого по имени Николай Бурбаки. На самом же деле это был актер-любитель, замаскированный патриархальной бородой, лекция которого являлась мастерской имитацией математического жаргона.

Необходимо отметить, что большую часть историй о Бурбаки следует считать недостоверной. Несмотря на то, что члены этой таинственной организации не давали друг другу кровавой клятвы молчания, многие из них так были довольны своей шуткой, что их собственные рассказы о себе умышленно противоречивы и апокрифичны. С другой стороны, не принадлежащие к этой группе люди вряд ли знают, насколько достоверно то, о чем они говорят: они лишь пересказывают, как правило, приукрашенные легенды.

В этой статье мы постараемся дать представление о

научных достижениях Бурбаки и перескажем несколько легенд, связанных с его (их) именем. Некоторые из этих историй не совсем проверены, чтобы не сказать больше, но это обстоятельство не делает их менее занимательными.



На этом рисунке, сделанном с одной гравюры, изображен генерал Бурбаки, имя которого вовсе не Николай, а Шарль-Дени-Сотэ. Однажды он чуть не стал королем Греции.

Научная публикация под псевдонимом не является, конечно, началом именно этой группы. Английский статистик Виллиам Сили Госсет (William Sealy Gosset) опубликовал свою основополагающую работу по теории малых выборок под псевдонимом «Student», вероятно, для того, чтобы не смущать своих хозяев, пивоваров из Гина (Guinees). Примерно в то же время, что и Бурбаки, появилась другая группа шутников, которая придумала некоего Е. С. Пондичери (E. S. Pondiczery), члена «Королевского института в Полдавии» (Royal Institut of Poldavia). Основная работа Пондичери была посвящена математическим курьезам. Его наивысшим достижением явилось, однако, единственное в своем роде использование псевдонима второго порядка: посылая статью о математической теории игры «big-game hunting» в журнал «The American Mathematical Monthly», Пондичери в сопроводительном письме просил разрешения подписать ее псевдонимом из-за очевидной несерьезности излагаемого там материала. Издатель согласился, и статья появилась в 1938 г. за подписью Н. Pétard.

Первобытные племена, а иногда и ученые испытывают на себе магическую силу имени. Это приводит к тому, что публикуются работы, которые никогда не были бы напечатаны, если бы имена авторов были другими. Георгий Гамов и его друг Ганс Бете увидели, какая чудесная возможность таится для них в появлении блестящего молодого физика с необычным именем, и решили не упустить случая. 1 апреля 1948 г. они опубликовали в журнале «The Physical Review» ничем не примечательную статью о происхождении химических элементов. Необычными были лишь имена авторов: Альфер, Бете и Гамов.

Говоря о статьях, появившихся под странными именами, уместно вспомнить о Морисе де Дюффаеле. Этот джентльмен достиг математического бессмертия весьма простым способом, опубликовав под своим именем некоторые классические труды крупнейших математиков. При этом он почти не маскировал своей деятельности. В 1936 г. им была опубликована, как его собственная, статья Пикара, впервые напечатанная всего лишь 24 годами ранее. Тексты Дюффаеля и Пикара были полностью идентичны, слово в слово, символ в символ, за одним исключением: по понятным причинам было выброшено подстрочное примечание, в котором Пикар ссылался на одну из более ранних своих работ. В конце концов такая ученость погубила Дюффаеля. Можно одурачить на некоторое время некоторых издателей, но нельзя полностью одурачить всех рецензентов. Рецензент статьи Пикара — Дюффаеля, к счастью, достаточно хорошо знал работы Пикара для того, чтобы обнаружить плагиат; это положило конец авторской карьере Дюффаеля.

Бурбаки не должны были скрывать свои работы от администрации пивоваренного завода; они также не просто невинные весельчаки, а серьезные математики, и, конечно, они не являются плагиаторами. Первоначально группа выступила под псевдонимом отчасти шутки ради, а отчасти для того, чтобы избежать длинного и надоедливого

списка авторов на титульном листе; сейчас этот псевдоним используется скорее в качестве коллективного имени, чем для маскировки. Имена членов группы уже не являются секретом для большинства математиков. Состав Бурбаки, так же как и большинства других корпораций, меняется с течением времени, но стиль и дух работ остаются неизменными. Лучше охарактеризовать этот стиль и дух одним прилагательным (принятый для этого термин — «бурбакический»), чем ссылками на «молодую французскую школу» или чем-либо подобным.

Первые выступления Бурбаки относятся к середине 1930-х годов, когда они начали публиковать заметки, рефераты и другие статьи в Докладах (*Comptes Rendus*) Французской Академии наук и в различных журналах. Об основном замысле их большой работы, к изданию которой они впоследствии приступили, было рассказано в статье, переведенной на английский язык и напечатанной в (1950 г.) в журнале «*The American Mathematical Monthly*» под названием «Архитектура математики»¹). В сноске к заголовку статьи указано: «Профессор Н. Бурбаки, бывший член Королевской Полдавской Академии (напоминание о Пондичерри!), ныне проживающий в Нанси (Франция), является автором обширного руководства по современной математике, выходящего под заголовком „Элементы математики“ [*Eléments de la Mathématique*], Paris, 1939, 10 томов которого уже вышли в свет». Сама статья является, между прочим, интересным изложением точки зрения Бурбаки на понятие «структуры» в математике и представляет собой превосходный пример, характеризующий дух Бурбаки.

Другая статья, напечатанная в журнале «*The Journal of Symbolic Logic*» за 1949 г., имеет громкое название «Основания математики для действующих математиков» (*Foundations of Mathematics for the Working Mathematician*). Она носит совершенно технический характер, однако личность авторов отчетливо проступает сквозь всю ее символику. Работа заканчивается следующими словами:

«Я утверждаю, что этих оснований достаточно для построения всей современной математической науки; в этом нет ничего нового, если не считать того, что я, не довольствуясь этим утверждением самим по себе, начну доказывать его тем же способом, каким Диоген доказывал существование движения: мое доказательство будет становиться всё более полным по мере написания моего трактата».

В этой статье сказано, что автор работает в университете Нанкаго (Нанси плюс Чикаго). Такое сочетание возникло, в основном, в связи с тем, что один из основателей Бурбаки работает в настоящее время в Чикагском университете. Имя этого математика Андре Вейль (*André*

¹) «*L'Architecture des Mathématiques*» в сборнике «*Les grands courants de la pensée mathématique*», изданном в 1948 г. F. Le Lionnais. Перевод этой статьи напечатан в настоящем сборнике «Математического просвещения» на стр. 99—112. (Прим. ред.)

Weil). Хотя это имя неизвестно широкой публике, многие коллеги Вейля считают его величайшим из ныне живущих математиков. Очень важными и глубокими являются его работы в области алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии; он оказывает значительное влияние на развитие математики XX столетия, даже некоторые из менее важных его работ (например, работы по однородным структурам и по гармоническому анализу топологических групп) открыли новые направления и вдохновили дальнейшие исследования¹⁾. Время от времени Нанкаго вновь напоминает о себе в связи с появлением новой серии математических книг повышенного типа, выходящих под впечатляющим заголовком: «Труды Математического института Нанкаго»²⁾.

Согласно одной из легенд, основная работа Бурбаки «Элементы математики» возникла из спора между Вейлем и Жаном Дельсартом (Jean Delsarte) на тему о том, как следует преподавать математический анализ. Однако, каковы бы ни были первоначальные причины возникновения этой работы, в настоящее время она преследует не только педагогические цели. Получается совершенно так же, как если бы обсуждение вопроса о том, как лучше научить понимать популярную музыку, дало бы начало всеобъемлющим исследованиям по гармонии и теории музыки. (Математики считают анализ элементарным предметом, они относятся к нему так же, как музыканты к музыке Виктора Гюберта³⁾).

Трактат Бурбаки (написанный по-французски) является обзором всей математической науки, выдержанным в духе современных идей и представлений. В целом это произведение будет состоять, по-видимому, из нескольких частей, но даже первая часть (озаглавленная «Фундаментальные структуры анализа») не исчерпывается вышедшими до сих пор 20 томами трактата. Подзаголовки шести разделов I части являются до некоторой степени неожиданностью для дилетанта или классического математика, который исходит из устаревших представлений о математике как о науке, состоящей из арифметики, геометрии и других традиционных разделов. Эти подзаголовки таковы: 1) Теория множеств. 2) Алгебра. 3) Общая топология. 4) Функции действительного переменного. 5) Топологические векторные пространства. 6) Интегрирование.

Каждая книга снабжена вкладышем, написанным на четырех страницах и содержащим ряд инструкций для правильного пользования

¹⁾ На русский язык переведена книга: А. Вейль, Интегрирование в топологических группах, М., 1950 (Прим. ред.)

²⁾ См., например, части 2 и 3 книги К. Шевалле «Теория Групп Ли», на обороте титульного листа которых сохранено указание на то, что эти книги относятся к серии «Трудов Математического института университета Нанкаго». (Прим. ред.)

³⁾ Популярный американский композитор, автор 40 оперетт; его музыка отличается общедоступностью мелодики. (Прим. ред.)

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ II

Н. БУРБАКИ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ

ОСНОВНЫЕ
СТРУКТУРЫПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
С. Б. КРАКОВСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Д. А. РАЙКОВА
С ПРЕДисЛОВИЕМ
П. С. АЛЕКСАНДРОВАГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ,
МОСКВА 1958

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

858

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

PAR

N. BOURBAKI

II

PREMIÈRE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

CHAPITRE I

STRUCTURES TOPOLOGIQUES

CHAPITRE II

STRUCTURES UNIFORMES



PARIS

HERMANN & Co, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1940

Титульные листы французского и русского изданий третьей книги первой части труда Бурбаки.

книгой. В этих инструкциях указана необходимая для чтения книги подготовка (приблизительно два года обучения на математическом факультете университета), даны пояснения относительно расположения материала и установлен «точно определенный логический порядок», в котором должны читаться отдельные главы, книги и части. В инструкциях разъясняются также педагогические приемы авторов; некоторые из них, в самом деле, очень хороши. Один из таких приемов, который мог бы быть с пользой позаимствован другими авторами, служит для предостережения читателя в местах особенно трудных и скользких, т. е. там, где читатель легко может допустить ошибку: все эти места помечены на полях бросающимся в глаза знаком «опасный поворот».



Эта кривая в трудах Бурбаки указывает на «опасный поворот» в рассуждениях.

С другой стороны, вряд ли можно считать оправданным слегка презрительное отношение авторов к замене специальных терминов тем, что они называют «неверно употребляемыми словообразованиями». Общеизвестно, что безоговорочная приверженность к совершенно точной терминологии обычно ведет к педантизму и неудобочитаемости. В отношении Бурбаки это особенно верно, поскольку их терминология и символика часто отличаются от общепринятых. Занятым, однако, является то обстоятельство, что «неверно употребляемые словообразования», используемые ими в качестве «неформальной» замены специальных терминов, имеют фактически обычный смысл: утомленные необходимостью запоминать свои собственные нововведения, авторы спокойно возвращаются к терминологии, принятой остальным математическим миром.

Почти каждый том Бурбаки содержит ряд великолепных упражнений. Математику невозможно изучать пассивно, и упражнения Бурбаки являются призывом к активности. Авторы проявляют много изобретательности в подборе новых упражнений, а также приспособлении и переделке старых. Как правило, они не указывают имен авторов воспроизводимых ими упражнений, однако, по-видимому, никто против этого не возражает. Математик считает даже честью для себя, если какая-либо из его статей украдена Бурбаки и использована ими в качестве упражнения.

Кроме того, Бурбаки помещают в свои книги вкладные листы, которые содержат сводку наиболее важных определений и аксиом. В каждой книге имеется также словарь, являющийся полным указателем и перечнем всей используемой терминологии, в частности, основных «бурбакизмов».

Единственно важная вещь, которой здесь не хватает, это — столь же полный библиографический указатель. Бурбаки стремятся к систематическому и всестороннему освещению предмета и часто включают в свое изложение великолепные исторические обзоры. Однако в этих исторических очерках они неохотно и очень редко ссылаются на классиков и почти вовсе не называют авторов наиболее значительных современных достижений. Здесь нет намеренного обмана (Бурбаки не претендуют на то, чтобы считаться творцами всей современной математики), но, это, конечно, может ввести в заблуждение будущих историков математики.

Такова внешняя обрисовка Бурбаки. Стиль же и дух Бурбаки, те качества, которые привлекают к ним друзей и отталкивают врагов, передать значительно труднее. Так же, как и музыку, их следует скорее чувствовать, чем понимать.

Бурбаки с самого начала завоевали себе симпатию изучающих математику тем, что они впервые систематически изложили некоторые предметы (например, общую топологию и полилинейную алгебру). До них этим наукам не было посвящено ни одного учебника или монографии. Бурбаки первыми взяли на себя труд систематизировать громадный материал, разбросанный в виде массы статей, которые выходили в течение нескольких десятилетий в различных журналах на нескольких языках.

Бурбаки отличаются своей непримиримостью ко всякого рода рутине, к догматизму в терминологии; они не признают гладкого и компактного изложения идей и являются противниками такой манеры, когда желание сказать всё о предмете не оставляет места для воображения и приводит, очевидно, к вялости мысли.

Типичным примером основательного и неторопливого стиля Бурбаки может служить их подход к определению числа «1». Почти 200 страниц посвящаются подготовке к самому определению. Затем они определяют число 1, используя в высшей степени сжатую и сокращенную символику; в сноске указывается, что несокращенная форма этого определения потребовала бы в их системе обозначений нескольких десятков тысяч символов. Справедливости ради следует отметить, что такие понятия, как число 1, отнюдь не являются простыми, как это могло бы показаться на первый взгляд. Это обстоятельство уже давно известно математикам, работающим в области математической логики.

Как же создавалась эта важнейшая совместная работа? Большая ее часть приписывается Жану Дьёдонне (Jean Dieudonné, сначала он работал в Нанси, теперь в Северо-западном университете, США). Дьёдонне почти с самого начала был наиболее активным деятелем группы. Так как Дьёдонне является автором многих трудов по математике под своим собственным именем, то довольно трудно провести различие между его собственными работами и работами, написанными им для Бурбаки. Рассказывают, что он смог однажды замечательным образом выйти из трудного положения, не искажая фактов. В одной из

заметок, опубликованных Дьёдонне под именем Бурбаки, была обнаружена ошибка. Эта ошибка была исправлена в статье, озаглавленной «Об ошибке г. Бурбаки» и подписанной Жаном Дьёдонне.

Количество членов Бурбаки колеблется, по-видимому, от 10 до 20. Все члены всегда были только французами за одним исключением. Этим исключением является Самуэль Эйленберг (Samuel Eilenberg), работавший сначала в Варшаве, а затем в Колумбийском университете. Известный среди друзей юности под именем S^2P^2 [первые буквы английского прозвища — «ловкий Сэмми, польское чудо» (Smart Sammy,



Николай Бурбаки изображен здесь в виде фантастической взбудораженной толпы французских математиков. Портретное сходство могло получиться только совершенно случайно.

Polish Prodigy)), Эйленберг является обаятельным и чрезвычайно общительным человеком, который за шесть месяцев своего пребывания в Соединенных Штатах больше узнал об этой стране, чем большинство американцев за всю свою жизнь. (Первым делом он отправился в длительное путешествие по стране на попутных автомашинах.) Так как он говорил по-французски как на своем родном языке и знал по алгебраической топологии больше, чем любой француз, то неписаное правило, согласно которому членами Бурбаки могут быть только французы, было на этот раз нарушено.

Французская ориентация Бурбаки не вызвана шовинистическими соображениями, а является просто лингвистической необходимостью, так как основателями являются французы. Когда звёзды первой величины, такие, как Вейль, Дьёдонне, Клод Шевалье и Анри Картан, собираются вместе со своими коллегами, то потоки льющейся при этом

французской речи поистине впечатляющи. Поэтому для того, чтобы следить за разговором и принимать участие в беседе, необходимо не только уметь говорить по-французски быстро и громко, но и знать еще самый последний парижский студенческий жаргон.

Несмотря на то, что на знаменитых собраниях Бурбаки все присутствующие удовлетворяют этим требованиям, трудно понять, как они ухитряются работать в таких условиях. Однако работа движется...

Члены корпорации собираются ежегодно, обычно в одном из привлекательных курортных местечек Франции, для принятия основных принципиальных решений. Поскольку их труды принесли и коммерческий успех (что явилось сюрпризом для Бурбаки), то денег оказалось достаточно как для покрытия дорожных расходов, так и для закупи необходимого количества провианта и французских вин, оживляющих заседания. (Между прочим, коммерческим успехом Бурбаки обязаны главным образом американскому рынку. Четыре из пяти главных членов Бурбаки являются сейчас жителями Соединенных Штатов.)

На составление тома Бурбаки затрачивается масса труда. После принятия тщательно разработанного проекта тома кто-нибудь дает свое согласие на написание предварительного варианта. Решаясь на это, он подвергает себя трудному испытанию. После окончания работы над первым вариантом копии его рассылаются другим членам Бурбаки. На следующем общем собрании этот вариант беспощадно критикуется, а иногда и вовсе отвергается. Например, первый вариант книги Бурбаки об интегрировании был написан Дьёдонне и получил название «чудовища Дьёдонне». Говорят, что по своему духу и содержанию «чудовище Дьёдонне» было очень похоже на хорошо известную американскую книгу по интегрированию, написанную автором, которого мы назовем здесь просто Х. «Чудовище Дьёдонне» никогда не было напечатано; коллеги Дьёдонне полностью забраковали его труд. Окончательно решило дело возмущение Вейля: «Чем делать подобные вещи, не лучше ли просто перевести на французский язык книгу Х и тем кончить дело».

После обсуждения первого варианта начинается работа над вторым, выполняемая, как правило, другим автором. Этот процесс продолжается дальше: небезызвестны случаи, когда делалось шесть или семь вариантов. Результатом этой тщательной работы является отнюдь не учебник для начинающих (даже Бурбаки признают это), но справочник, почти энциклопедия, без которой математика XX в. была бы лучше или хуже, но совсем не той, которой она является сейчас.

Юношеская плодовитость Бурбаки служит хорошим предзнаменованием для будущего их трудов, она же вызывает особое раздражение их недоброжелателей. Руководители Американского математического общества не нашли ничего забавного в том, что получили заявление о принятии в члены Общества, подписанное Н. Бурбаки. Они восприняли это как легкомысленную шутку и отклонили заявление. Секретарь Общества бесстрастно сообщил, что Бурбаки не может

рассчитывать на большее, чем стать коллективным членом Общества. Так как членские взносы для коллективных членов значительно выше, чем для индивидуальных, и так как Бурбаки не пожелал признать, что он не существует, то тем дело и кончилось.

Да, шутка может быть легкомысленной, но легкомыслие свойственно молодости, а математика — это профессия молодых. Очень хорошо, что Бурбаки так подчеркивают свою молодость. Недавно, после того как Дьёдонне и Вейль достигли 50 лет, они заявили о своем уходе из группы, несмотря на то, что являлись основателями Бурбаки. Они объявляли ранее о намерении работать в группе только до 50 лет и выполнили свое обещание.

В заключение следует предупредить читателя о возможности различного рода инсинуаций, инспирированных Бурбаки и направленных против автора настоящей статьи. Мы рекомендуем читателю быть в этом отношении очень осторожным. Дело в том, что Бурбаки не любят, когда разглашаются их секреты, и неоднократно доказывали свое умение наказывать виновников. Конечно, сведения о Бурбаки появляются в печати не впервые. В 1949 г. Андре Деляшэ (Andrée Delachet) в своей небольшой книге по математическому анализу ссылаясь на работы «многоликого математика» Н. Бурбаки и даже позволил себе назвать имена некоторых руководителей корпорации. За год или два до этого в Ежегоднике Британской Энциклопедии была напечатана небольшая заметка, в которой рассказывалось о Бурбаки как о группе. Автором этой заметки был Ральф Бос (Ralph P. Boas), в то время — главный редактор журнала «Mathematical Reviews», а теперь — коллега Дьёдонне по Северо-западному университету. Вскоре после этого издатели Британской Энциклопедии получили негодующее письмо, подписанное Н. Бурбаки, в котором выражался протест против голословного утверждения Боса о несуществовании Бурбаки. Еще не улеглись смущение издателя и замечательство Боса, когда один из членов математического отделения Чикагского университета написал правдивое, но очень хитро составленное письмо, из которого явствовало, хотя и нигде не было сказано прямо, что Бурбаки действительно существует. Издатели так и не смогли понять все до конца, пока не пришло письмо от секретаря Американского математического общества (того самого, который отклонил заявление Бурбаки о приеме в члены общества).

Но Бурбаки взяли реванш.

Используя свои международные связи, корпорация распустила слух о том, что Бос не существует. Бос, по словам Бурбаки, — это «коллективный псевдоним группы молодых американских математиков, которые сообща издают журнал «Mathematical Reviews».

Перевод с английского Ф. Л. Варпаховского и Г. А. Шестопал

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ В XVIII ВЕКЕ

Когда в наших учебниках анализа речь идет о понятии функции, мы вспоминаем прежде всего авторов XIX века — Дирихле и Лобачевского, формулировавших это понятие в виде, близком к современному. Справедливости ради следовало бы также вспомнить и об их ранних предшественниках и прежде всего об Эйлере. Вот что писал Эйлер в предисловии к «Дифференциальному исчислению» (1755 г.)¹⁾:

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, если x обозначает переменное количество, то все количества, которые как-либо зависят от x , т. е. определяются им, называются его функциями; таковыми являются квадрат количества x и все его степени, равно как и количества как угодно составленные из них. Эти количества могут быть и трансцендентными и вообще любыми, если только они так зависят от x , что с увеличением или уменьшением x сами они подвергаются изменению».

Французский автор большого курса анализа, выпущенного в свет в конце XVIII века («*Traité du calcul différentiel et du calcul integral*», Paris, 1797) С. Лакруа в трактовке понятия функции следует за Эйлером. Вот что он пишет во введении²⁾:

«Старинные аналитики понимали вообще под наименованием функции некоторого количества — все степени этого количества. В дальнейшем содержание этого термина расширили, прилагая его к результатам различных алгебраических операций; так, называли еще функцией одного или многих количеств всякое алгебраическое выражение, содержащее каким-либо образом сумму, произведения, частные, степени и корни этих количеств. Наконец, новые идеи, достигнутые в развитии анализа, привели к следующему определению функций:

Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих других количеств, называется функцией этих последних, [независимо от того — А. М.] известно или нет, через какие операции нужно пройти, чтобы перейти от них к первому.

Например, корень уравнения пятой степени, выражение которого нельзя указать при современном состоянии алгебры, есть тем не менее функция коэффициентов уравнения, потому что его значение зависит от значений этих коэффициентов».

А. М.

¹⁾ Русское издание в переводе М. Я. Выгодского, М.—Л., 1949, стр. 38.

²⁾ Том I, стр. 1.

НОВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ

1. Д. Блануша. Новая модель плоскости Лобачевского

В 1868 г. Е. Бельтрами [2] доказал, что любая поверхность постоянной отрицательной кривизны изометрична плоскости Лобачевского; другими словами, что кусок поверхности отрицательной кривизны представляет собой евклидову (т. е. использующую лишь понятия евклидовой геометрии) модель куска плоскости Лобачевского, если принять за расстояние между двумя точками поверхности длину отрезка геодезической (т. е. кратчайшей линии на поверхности), соединяющей эти две точки. Этот результат Бельтрами был воспринят всеми как построение модели плоскости Лобачевского; он впервые убедил математиков в непротиворечивости геометрии Лобачевского. Однако в дальнейшем выяснилось, что предположение Бельтрами не дает возможности построить модель всей плоскости Лобачевского. Все попытки найти в трехмерном пространстве неограниченную поверхность постоянной отрицательной кривизны, не имеющую особенностей, оказались безуспешными, а в 1900 г. Д. Гильберт [3] показал, что это вообще невозможно¹⁾. Таким образом, идея Бельтрами не привела к построению евклидовой модели плоскости Лобачевского, для чего впоследствии были использованы совсем другие подходы (модели Клейна и Пуанкаре плоскости Лобачевского, осуществляющиеся внутри круга евклидовой плоскости).

Откажемся теперь от требования трехмерности пространства, в котором строится модель, и будем считать это пространство N -мерным. В таком случае задача построения модели плоскости Лобачевского в виде поверхности в нашем пространстве сведется к следующему. Вместо координат x, y, z точки трехмерного пространства мы будем иметь теперь N координат x_1, x_2, \dots, x_N .

¹⁾ Эта теорема доказана при условии достаточной гладкости определяющих поверхность функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ (такое условие естественно, так как только в этом случае можно развить достаточно содержательную геометрию на поверхности). Заметим, что при условии лишь однократной непрерывной дифференцируемости существование такой поверхности вытекает из очень интересных работ молодого американского геометра Дж. Нэш а. Об этих работах говорится в следующем реферате Н. В. Ефимова, стр. 243—246 настоящего выпуска. (Прим. ред.)

Расстояние между двумя точками пространства выражается с помощью формулы

$$d = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_N - x''_N)^2}.$$

Двумерная поверхность задается уравнениями:

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad \dots, \quad x_N = x_N(u, v),$$

где u, v — какие-то параметры, к которым отнесена поверхность. Измерение длин на поверхности, как и в классической дифференциальной геометрии, производится с помощью линейного элемента

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N dx_i^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (1)$$

$$[\text{где } E = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_N}{\partial u}\right)^2 \text{ и т. д.}].$$

Обратимся теперь к плоскости Лобачевского. Длины всевозможных кривых на этой плоскости, как известно, можно также измерять с помощью линейного элемента

$$ds^2 = \bar{E} d\bar{u}^2 + 2\bar{F} d\bar{u} d\bar{v} + \bar{G} d\bar{v}^2, \quad (2)$$

где (\bar{u}, \bar{v}) — (какие-то) координаты точки плоскости Лобачевского. Построить модель плоскости Лобачевского будет означать для нас следующее: *надо построить поверхность, линейный элемент (1) которой при определенном выборе параметров u, v на этой поверхности имел бы в точности такой же вид, как линейный элемент (2) плоскости Лобачевского* (при соответствующем выборе координат \bar{u}, \bar{v}); *тогда измеренное по поверхности расстояние между точками (a, b) и (c, d) поверхности будет в точности равно расстоянию между точками плоскости Лобачевского, имеющими те же координаты (a, b) и (c, d) .*

Как мы уже отмечали, в трехмерном пространстве такой поверхности не существует. Не было известно до сих пор и примеров таких поверхностей в многомерном пространстве. Первая поверхность такого рода (при $N=6$) была построена в 1955 г. югославским математиком Д. Бланушей [1].

Блануша сумел указать в явном виде шесть функций $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, ..., $x_6(u, v)$ (бесконечно дифференцируемых, но не аналитических) так, что соответствующая поверхность шестимерного пространства будет иметь тот же самый линейный элемент, что и плоскость Лобачевского, т. е. будет изометрична плоскости Лобачевского. Эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^u \sqrt{1 - [f'_1(\xi)]^2 - [f'_2(\xi)]^2} d\xi, & x_2 &= v, \\ x_3 &= f_1(u) \cos [Nv\psi_1(u)], & x_4 &= f_1(u) \sin [Nv\psi_1(u)], \\ x_5 &= f_2(u) \cos [Nv\psi_2(u)], & x_6 &= f_2(u) \sin [Nv\psi_2(u)]. \end{aligned}$$

Здесь $\phi_1(u)$ и $\phi_2(u)$ — некоторые кусочно-постоянные (ступенчатые) функции (которые, следовательно, в отношении дифференцирования ведут себя как постоянные). Функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ имеют вид

$$f_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{N\psi_1(u)} \operatorname{sh} u, \quad f_2(u) = \frac{\varphi_2(u)}{N\psi_2(u)} \operatorname{sh} u,$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ — две бесконечно дифференцируемые функции, которые обращаются в нуль со всеми своими производными в точках разрыва $\psi_1(u)$, соответственно $\psi_2(u)$ [так что функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$ уже бесконечно дифференцируемы при любом u], причем $\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) \equiv 1$. Постоянная N подбирается так, чтобы было $1 - [f'_1(\xi)]^2 - [f'_2(\xi)]^2 > 0$ ¹⁾.

При выполнении всех этих условий непосредственно получаем:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2,$$

что и доказывает изометричность нашей поверхности плоскости Лобачевского (см. [4], стр. 252).

Д. Блануша построил также модель n -мерного пространства Лобачевского, которая осуществляется в виде n -мерной поверхности в N -мерном евклидовом пространстве, где $N = 6n - 5$. При $n = 2$ это построение дает модель плоскости Лобачевского, отличную от описанной выше.

Л и т е р а т у р а

1. D. B l a n u š a, Über die Einbettung hyperbolischen Räume in Euklidische Räume. Monatsh. für Math., 59, № 3, 1955, стр. 217—229.
2. Е. Б е л ь т р а м и, Опыт интерпретации неевклидовой геометрии, Сборник «Об основаниях геометрии», М.—Л., 1957, стр. 180—212.
3. Д. Г и л ь б е р т, О поверхностях постоянной гауссовой кривизны, там же стр. 213—221.
4. Н. В. Е ф и м о в, Высшая геометрия, 1949.

А. С. Солодовников

2. Н. В. Ефимов — Е. Гейнц. *Исследования возможности вложения поверхностей отрицательной кривизны в трехмерное пространство.*

Уже более 50 лет, как Д. Гильберт [5] доказал свою известную теорему о поверхностях постоянной отрицательной кривизны: *в трехмерном пространстве невозможна полная* (т. е. неограниченная)

¹⁾ Например, можно взять

$$\varphi_1(u) = \left[\frac{1}{A} \int_0^u \sin \pi \xi e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi \xi}} d\xi \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_2(u) = (1 - \varphi_1^2(u))^{\frac{1}{2}},$$

$$A = \int_0^1 \sin \pi \xi e^{-\frac{1}{\sin^2 \pi \xi}} d\xi, \quad \phi_1(u) = e^{2 \left[\frac{|u|+1}{2} \right]}, \quad \phi_2(u) = e^{2 \left[\frac{|u|}{2} \right]}$$

и $N = 1000$ (значок $[a]$ означает целую часть числа a).

поверхность, гауссова кривизна которой K постоянна и отрицательна. Это утверждение равносильно следующему: плоскость Лобачевского не допускает регулярного погружения в трехмерное евклидово пространство.

К этой работе примыкает ряд исследований, объектом которых, в основном, являются следующие три вопроса:

1) Можно ли уменьшить имеющиеся в теореме Гильберта требования регулярности поверхности? Существование у поверхности $r = r(u, v)$ гауссовой кривизны $K = \frac{(r_u r_v r_{uu})(r_u r_v r_{vv}) - (r_u r_v r_{uv})^2}{[r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2]^2}$ пред-

полагает, что векторная функция $r = r(u, v)$, по крайней мере, дважды (непрерывно) дифференцируема; спрашивается, можно ли реализовать плоскость Лобачевского в виде поверхности $r = r(u, v)$ трехмерного пространства, где на функцию $r = r(u, v)$ наложены меньшие требования регулярности (например, так что функции $r = r(u, v)$ имеет лишь непрерывные первые производные)?

2) Возможно ли обобщение теоремы Гильберта по размерности объемлющего пространства. Другими словами, можно ли утверждать невозможность вложения плоскости Лобачевского в евклидово пространство $n > 3$ измерений?

3) В какой мере в условии теоремы Гильберта существенно условие постоянства кривизны? Естественно предположить, что важно здесь лишь условие отрицательности кривизны, т. е. что утверждение теоремы остается верным, если гауссова кривизна K поверхности подчинена условию $K \leq -\alpha < 0$ (т. е. $\sup K < 0$).

Ответ на первый вопрос оказался отрицательным. Из недавних работ американского математика Дж. Нэша и голландца Н. Кейпера (см. [6]) вытекает, что плоскость Лобачевского можно реализовать в виде гладкой поверхности трехмерного пространства, т. е. поверхности $r = r(u, v)$, задаваемой однократно непрерывно дифференцируемой векторной функцией $r(u, v)$ (которая, однако, не будет иметь вторых производных). Таким образом, значительно уменьшить требования регулярности в условиях теоремы Гильберта не удастся.

Также и ответ на второй вопрос оказался в известном смысле отрицательным. До последнего времени представлялось вероятным, что теорема Гильберта сохраняет силу для любых конечномерных евклидовых пространств, т. е. что ни при каком n в n -мерное евклидово пространство нельзя вложить даже двумерную плоскость Лобачевского. В действительности же дело оказалось совсем иным. Не так давно югославским математиком Д. Бланушей было показано¹⁾, что плоскость Лобачевского допускает регулярное [даже бесконечно дифференцируемое, т. е. осуществляемое с помощью бесконечно диф-

¹⁾ Реферат работы Д. Блануши помещен на стр. 241 — 243 настоящего выпуска. (Прим. ред.)

ференцируемой векторной функции $r(u, v)$] вложение в шестимерное евклидово пространство. Таким образом, теперь положение вещей остается неизвестным лишь для размерностей $n=4$ и $n=5$.

Что касается третьего вопроса, то в общем случае он остается до сих пор открытым. В частном случае поверхности, однозначно проектирующейся на плоскость [т. е. поверхности, которую можно представить уравнением $z=f(x, y)$], этот вопрос удалось решить автору настоящей заметки (см. [1], [2]): *если регулярная поверхность однозначно проектируется на всю плоскость, то гауссова кривизна ее не может оставаться меньше отрицательной константы.*

Это предложение является следствием оценки протяженности куска поверхности отрицательной кривизны в зависимости от верхней грани кривизны. Именно: *если кусок поверхности имеет гауссову кривизну $K \leq -\alpha < 0$ и если его проекция на плоскость однозначно покрывает круг радиуса R , то R не превышает некоторой константы Q , которая зависит только от α : $R \leq Q(\alpha)$.*

Так как гауссова кривизна поверхности $f(x, y)$ выражается формулой

$$K = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^2},$$

то последний результат можно сформулировать также так:

Уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = K \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^2, \quad (1)$$

где $K \leq -\alpha < 0$, не допускает всюду регулярных решений; каждое решение в каждом круге радиуса $Q(\alpha)$ имеет особенность.

Доказательство этой теоремы основано на рассмотрении некоторых кусочно-гладких линий, составленных из характеристик уравнения (1), вдоль которых $\frac{\partial z}{\partial x}$ монотонно и строго растет; вместе с тем оказывается, что в любом круге радиуса $R > Q(\alpha)$ хотя бы одна из таких линий дважды пересекает некоторую линию $\frac{\partial z}{\partial x} = \text{const}$, т. е. предположение $R = Q(\alpha)$ приводит к противоречию. Этот метод дает следующую оценку для величины $Q(\alpha)$:

$$Q(\alpha) \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha}} (2\pi + \sqrt{3\pi}).$$

Новое, более короткое доказательство того же предложения с улучшением оценки для константы $Q(\alpha)$ дал недавно Е. Гейнц [3]; его рассуждения основаны на использовании вспомогательной функции

$$\psi(r) = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta,$$

где $z = f(\rho, \theta)$ — полярное уравнение исследуемой поверхности, т. е. некоторое решение уравнения (1). Оказывается, что функция $\psi(r)$, будучи выпуклой вниз, так быстро растет, что может оставаться регулярной лишь на сравнительно коротком отрезке, длина которого ограничена константой, зависящей только от числа α . Метод Гейнца дает

$$Q(\alpha) \leq e \sqrt{\frac{3}{\alpha}}.$$

Развитые в работах [1] и [2] соображения, относящиеся к характеристикам уравнения (1), позволяют получить также некоторые результаты для полных поверхностей отрицательной кривизны, которые не имеют однозначной проекции на плоскости. На этом пути удается установить, что $\sup K = 0$; однако при этом на поверхность и ее сферический образ накладываются некоторые дополнительные условия (см. [4]).

Л и т е р а т у р а

1. Н. В. Ефимов, Исследование полной поверхности отрицательной кривизны, Доклады Академии наук СССР 93, № 3, 1953, 393 — 395.
2. Н. В. Ефимов, Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны, Доклады Академии наук СССР, 93, № 4, 1953, 609—611.
3. E. Hein z. Über Flächen mit eindeutigen Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, Math. Ann. 129. № 5, 451 — 454.
4. Н. В. Ефимов, Исследование сферического образа поверхности отрицательной кривизны, Доклады Академии наук СССР 105, № 4, 1955, 628 — 630.
5. Д. Гильберт, О поверхностях постоянной отрицательной кривизны, Сборник «Об основаниях геометрии», М.—Л., 1957, стр. 213 — 221.
6. Ю. Е. Боровский, Новости математической науки, «Математическое просвещение», вып. 2, 1957, 261 — 263.

Н. В. Ефимов

3. У. Е. Хик, Р. Хайман и др. Применение идей теории информации к определению времени психологических реакций.

Получение определенной информации всегда бывает связано с выяснением каких-либо обстоятельств, не известных нам ранее. Поэтому об информации, содержащейся в исходе какого-либо опыта, можно говорить лишь тогда, когда опыт этот, вообще говоря, может иметь несколько различных исходов, и мы не знаем заранее, какой именно исход на самом деле будет иметь место.

Еще в 1928 г. американский связист Хартли [6] предложил принять за меру информации, содержащейся в исходе опыта α , могущего иметь n различных исходов, логарифм этого числа исходов: $I(\alpha) = \log n$. Выбор именно этой функции от числа исходов может быть оправдан очень простыми соображениями. Ясно прежде всего,

что информация должна быть возрастающей функцией числа исходов: чем более исходов может иметь наш опыт, тем труднее заранее предугадать его результат и, следовательно, тем большую информацию содержит сообщение об исходе опыта. Далее естественно требовать, чтобы информация, содержащаяся в сообщении об исходах двух независимых друг от друга опытов, была равна сумме информации, содержащихся в выяснении исхода первого и исхода второго из них. Но пара опытов (α_1, α_2) , где α_1 и α_2 могут иметь соответственно n_1 и n_2 исходов, является новым опытом, могущим иметь $n_1 \cdot n_2$ исходов (каждый из n_1 исходов первого опыта может комбинироваться с каждым из n_2 исходов второго). Отсюда можно заключить, что должно выполняться равенство

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = I(\alpha_1) + I(\alpha_2)$$

или

$$I(n_1 n_2) = I(n_1) + I(n_2).$$

Это равенство вместе с условием возрастания $I(n)$ с ростом n приводит к выводу, что $I(\alpha) = I(n) = C \log n$, $C > 0$. Значение постоянной C можно выбрать любым, так как его изменение (которое равносильно изменению основания системы логарифмов) сводится лишь к изменению единицы измерения информации; если положить $C = 1$, а логарифмы считать десятичными, то единицей измерения I будет десятичная единица информации, т. е. та информация, которая содержится в сведениях об исходе опыта, могущего иметь 10 разных исходов.

Весьма элементарные соображения Хартли не смогли сыграть большой роли в истории науки, так как они полностью игнорировали возможные качественные различия между отдельными исходами опыта, считая все исходы совершенно равноправными. На самом деле, разумеется, информация, содержащаяся в выяснении исхода опыта α , может существенно зависеть от того, какой именно исход оказался имеющим место. Это хорошо понимал и сам Хартли, но он считал, что качественные различия между разными исходами определяются некоторыми «психологическими факторами», не имеющими отношения к инженеру. Безосновательность этой точки зрения была вскрыта в 1948 г. выдающимся американским математиком и инженером К. Шенноном [5], определившим меру количества информации, учитывающую возможные отличия исходов опыта друг от друга. Эта работа Шеннона явилась одним из крупнейших достижений как чистой, так и прикладной математики за послевоенные годы; на ее основе возникла целая самостоятельная научная дисциплина — *теория информации*, интенсивно развивающаяся вплоть до настоящего времени.

Основная идея Шеннона тесно связана с возможностью количественно охарактеризовать основные (с точки зрения вопроса об информации) особенности различных исходов опыта с помощью их вероятности, к которой будет близка доля (относительная частота)

соответствующего исхода в последовательности многократных повторений одного и того же опыта при одинаковых внешних условиях. Пусть, например, опыт α может иметь n различных исходов A_1, A_2, \dots, A_n , вероятности осуществления которых равны соответственно p_1, p_2, \dots, p_n . В таком случае информация, содержащаяся в сведениях об исходе опыта α , будет зависеть от этого исхода; средняя же информация, которую мы будем получать при одном осуществлении опыта α и выяснении его исхода, будет зависеть от всех вероятностей p_1, p_2, \dots, p_n (например, если p_1 весьма близко к единице, а p_2, \dots, p_n очень малы, то при выполнении опыта почти всегда будет получаться исход A_1 ; поэтому исход α здесь можно предсказать с большой уверенностью в успехе, и выяснение этого исхода несет мало информации). Простые соображения, типа приведенных выше (ср. [7]), показывают, что в этом случае *за среднюю информацию, содержащуюся в исходе α , следует принять выражение* $I(\alpha) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_n \log p_n$. Это и есть основная формула Шеннона.

Рассмотрим теперь два опыта β и α , могущих иметь те или иные исходы. Может случиться так, что знание исхода первого опыта β не несет никакой информации об исходе второго, т. е. что выяснение этого исхода никак не влияет на вероятности p_1, p_2, \dots, p_n исходов опыта α . В этом случае опыты β и α называются *независимыми*; так, например, очевидно, независимы опыты, состоящие в вытаскивании карты из тщательно перетасованной колоды и в определении погоды, которая будет иметь место завтра. [Это утверждение означает невозможность предсказания погоды «по картам».] Однако возможно, что знание исхода β существенно влияет на вероятности исходов α ; так, например, дождливая погода в определенный день значительно увеличивает шансы на то, что и на следующий день будет идти дождь. Иначе это можно выразить так: опыты β и α , состоящие в определении погоды в два последовательных дня, являются *зависимыми*. В подобных случаях знание исхода β может заметно изменить информацию $-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_n \log p_n$, содержащуюся в осуществлении опыта α (ибо оно может изменить вероятности p_1, p_2, \dots, p_n отдельных исходов этого опыта). Разумеется, это изменение информации, получаемой при осуществлении α , может быть различным при различных исходах β , т. е. может зависеть от этого исхода. Среднее значение информации об исходе α при известном исходе β (которое можно определить как среднее арифметическое большого числа величин $-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots - p_n \log p_n$, получаемых при многократном осуществлении опыта β) называют *средней условной информацией*, содержащейся в сведениях об исходе опыта α при условии предварительного осуществления опыта β (или просто *условной информацией*, содержащейся в α при условии β).

Ясно, что если опыты α и β независимы, то условная информация, содержащаяся в исходе опыта α при условии β , не отличается от

(безусловной) информации, получаемой без предварительного осуществления β . Если же опыты α и β зависимы, то условная информация, содержащаяся в исходе α при условии предварительного осуществления β , будет меньше информации, заключающейся в определении исхода α без учета опыта β ; так, например, определение погоды в определенный день даст нам более ценную (большую) информацию, если погода в предыдущий день не была нам известна. Величина, на которую уменьшается информация, содержащаяся в сведениях об исходе, при предварительном выполнении опыта β , называется согласно Шеннону *информацией об опыте α , заключающейся в опыте β* , и обозначается через $I(\alpha, \beta)$.

Основным результатом Шеннона является доказательство того, что *время, требующееся для передачи сообщения по какой-либо технической линии связи* (при условии, что эта передача производится наиболее рациональным образом), *пропорционально количеству переданной информации* (ср. [5], [7]). Общее понятие информации об опыте α , содержащейся в опыте β , оказывается важным для точной формулировки этого утверждения из-за того, что неизбежные в любой линии связи помехи могут привести к искажению передаваемого сообщения; таким образом, основную роль здесь играет информация об исходе опыта α , состоящего в передаче некоторого сигнала, которая содержится в исходе опыта β , состоящего в приеме того же сигнала на приемном конце линии связи.

Работа Шеннона непосредственно возникла из практических задач техники связи; первоначальные ее применения относились к телеграфным, телефонным или телевизионным линиям. Однако постановка задачи здесь является совершенно общей; поэтому те же идеи можно применить ко всем случаям, в которых имеет место передача некоторой информации. В частности, стимулированные работой Шеннона психологические исследования показывают, что *пропорциональность времени передачи количеству переданной информации имеет место и при передаче информации по нервным волокнам от органов чувств к мозгу и от мозга к органам чувств*; условие о наиболее рациональной системе передачи информации здесь, по-видимому, автоматически обеспечивается организмом.

Одним из основных понятий экспериментальной психологии является понятие *психологической реакции* — ответа организма на определенное раздражение или воздействие (т. е. на какой-то сигнал). Большое внимание при этом уделяется изучению сложных реакций, характерным примером которых являются *реакции выбора*, где имеется несколько различных типов сигналов и на каждый из них требуется отвечать по-разному. Известно, что в случае реакции выбора время реакции (время, протекающее между подачей сигнала и ответом на него) возрастает при возрастании числа n возможных сигналов; аккуратная количественная проверка этого факта была произведена еще в 80-х годах прошлого века немецким психологом И. Меркелем.

Обработка данных Меркеля (и данных других подобных опытов), произведенная в 30-х годах нашего века, показала, что время реакции выбора при возрастании n растет, примерно, как $\log n$. Этот результат хорошо согласуется с основным результатом Шеннона, поскольку количество информации, содержащейся в подаваемом сигнале — исходе опыта α , имеющего n равновероятных исходов (а в опытах Меркеля и во всех последующих опытах за исключением тех, о которых будет речь ниже, n различных сигналов всегда имели одинаковую частоту), равно $-p_1 \log p_1 - \dots - p_n \log p_n = n \cdot \left(-\frac{1}{n} \log \frac{1}{n}\right) = \log n$ (ср. выше, стр. 246—247).

Такое истолкование опытов Меркеля позволяет предсказать также результаты опытов, в которых средняя информация, доставляемая сигналом,

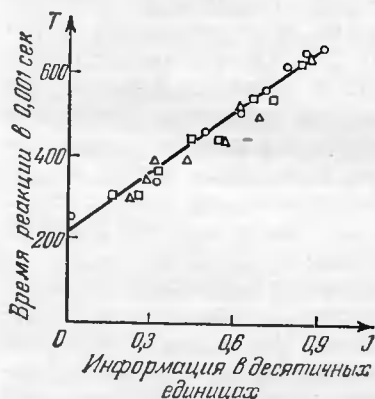


Рис. 1.

3, ..., 8). По оси ординат на рис. 1 откладывалось среднее время реакции T , т. е. среднее время, протекавшее между зажиганием лампочки и произнесением слова (это время определялось из длинной серии опытов, производимых с предварительно тренированным испытуемым), а по оси абсцисс — информация I (в десятичных единицах), заключающаяся в определении того, какая именно лампочка зажглась (эта информация равна $\log n$). Из чертежа видно, что все кружки с большой степенью точности укладываются на одну прямую; это и доказывает, что время реакции растет как $\log n$ (результат Меркеля).

Более сложной ситуации отвечают изображенные на рис. 1 квадратики и треугольники. Квадратики отвечают 8 опытам, во всем подобных предшествующим, где, однако, разные лампочки зажигались с разной частотой (имели разную вероятность зажечься). По оси ординат по-прежнему откладывалось среднее время реакции T , определяемое из длинной серии опытов с тренированным наблюдателем, а по оси абсцисс — информация $I = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \dots$

изменения числа n исходов опыта α , а каким-либо другим образом. Проверка этого предсказания была не так давно произведена в работах ряда психологов, первыми из которых были английский психолог У. Е. Хик и американский психолог Р. Хайман. На рис. 1 приведены результаты опытов Хаймана. Кружки на этом рисунке отвечают восьми опытам, в которых испытуемому надо было произнести в микрофон одно из n определенных слов в ответ на зажигание той или иной из n лампочек, укрепленных на щите перед его глазами (n в разных случаях равнялось 1, 2, 3, ..., 8). По оси ординат на рис. 1 откладывалось среднее время

... — $p_n \log p_n$, заключающаяся в определении того, какая лампочка зажглась (p_1, p_2, \dots, p_n — частоты, с которыми зажигались отдельные лампочки; число n лампочек в отдельных опытах равнялось 2, 4, 6 и 8). Треугольники отвечают опытам, в которых зажигания отдельных лампочек были *не независимы*, т. е. после зажигания определенной лампочки различные лампочки зажигались с разными частотами (вероятностями); здесь по оси абсцисс откладывалась средняя условная информация, содержащаяся в опыте α (зажигание лампочки), при условии, что нам известен исход предшествующего опыта α_0 (зажигание предыдущей лампочки). Из того, что и квадратики и треугольники довольно точно уложились на прямую, определенную кружками, следует, что время реакции определяется именно информацией, которую получает испытуемый¹⁾.

Близкий характер имеют и несколько более ранние опыты Хика, результат которых изображен на рис. 2. В этих опытах заранее задавалось время реакции T , т. е. время, по истечении которого испытуемый должен был отреагировать на зажигание определенной лампочки (реакция здесь заключалась в нажатии кнопки с номером, совпадающим с номером лампочки; число n лампочек и кнопок в разных опытах менялось от 1 до 10). В тех случаях, когда от испытуемого требовалось, чтобы ответ слишком быстро следовал за зажиганием, он часто ошибался (т. е. нажимал не ту кнопку, которую надо); таким образом, здесь исход опыта α (зажигание лампочки) не определяли однозначно исхода опыта β (нажатие кнопки). На рис. 2 по оси ординат отложено (задаваемое экспериментатором) время реакции T , а по оси абсцисс — информация I об опыте α , содержащаяся в опыте β (т. е. та информация об исходе опыта α , которую за время T мог усвоить испытуемый; для вычисления этой информации надо было лишь знать частоту случаев, когда испытуемый ошибался). Результаты опытов Хика изображены крестиками; на рис. 2 видно, что крестики довольно точно укладываются на прямую, определяемую кружочками, отвечающими проводимым с тем же испытуемым опыту «меркелевского» типа, где

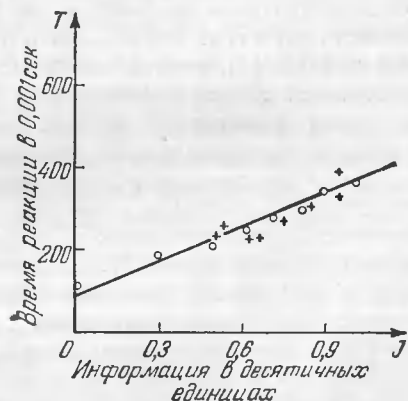


Рис. 2.

¹⁾ Все опыты, отраженные на рис. 1, проводились с одним испытуемым. При других испытуемых Хайман получал аналогичные результаты; однако прямая, выражающая зависимость T от I здесь располагалась несколько иначе (пересекала ось ординат в другой точке и имела другой наклон).

среднее время реакции заранее не задавалось, но требовался безошибочный ответ.

После Хика и Хаймана опыты такого рода неоднократно повторялись и другими учеными. Так, американские психологи Клеммер и Мюллер производили опыты, обставленные почти так же, как и опыты Хика, с тем лишь различием, что здесь могли зажигаться сразу несколько лампочек, в ответ на что требовалось нажать сразу несколько кнопок; английский психолог Кроссман провел широкие эксперименты, в которых определялось время, требующееся для того, чтобы разложить карты из перетасованной колоды в несколько кучек, определяемых теми или иными условиями (например, разложить карты по мастям; здесь рассматриваемый опыт имеет четыре равновероятных исхода); американские психологи Квастлер и Вульф изучали время, требующееся для печатания на машинке опытной машинисткой заданных бессмысленных последовательностей из определенного числа букв, повторяющихся с заданными частотами («случайный текст»), или исполнения опытным пианистом на фортепьяно «случайной» последовательности нот и т. д. Все эти опыты (обзор которых можно найти в статье Бриккера [3], напечатанной в специальном сборнике, посвященном применениям теории информации в психологии) показывают, что среднее время реакции T во всех рассматриваемых случаях с большой точностью пропорционально информации I , содержащейся в подаваемом сигнале. Отметим также, что при опытах разного рода (например, при изучении реакции на зажигание лампочек и при печатании «случайного текста»), производимых с одним и тем же испытуемым, мы будем получать разные прямые, т. е. разные коэффициенты пропорциональности T и I ; однако наименьший наклон подобных прямых (характеризующий наибольшее количество информации, которое человек может усвоить за единицу времени), получаемый при наиболее благоприятных условиях опыта с тщательно тренированным испытуемым, оказывается для всех людей почти одинаковым (см. по этому поводу специальную работу Квастлера [4]).

Литература

1. W. E. Hick, On the rate of gain of information, Quart. Journ. Experim. Psychol. 4, № 1, 1952, стр. 11—26.
2. R. H. Hyman, Stimulus information as a determinant of reaction time, Journ. of Experim. Psychol. 45, № 3, 1953, стр. 188—196.
3. P. D. Bricker, Information measurement and reaction time: a review, Сборник «Information theory in psychology», 1955.
4. H. Quastler, Studies of human channel capacity, Сборник «Information theory», London, 1956, 361—371.
5. К. Шеннон, Статистическая теория передачи электрических сигналов, Сборник «Теория передачи информации при наличии помех», М., ИЛ, 1953.
6. Р. В. Л. Хартли, Передача информации, Сборник «Теория передачи информации и ее применения», М., Физматгиз, 1959.
7. А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, М., Физматгиз, 1959.

А. М. Яглом

V. ЗАДАЧИ

Под редакцией И. М. Яглома

ЗАДАЧИ

1. Задачи по элементарной математике

А. Задачи средней трудности

40. Выписываются подряд все числа, кратные девяти:

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, \dots \quad (1)$$

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

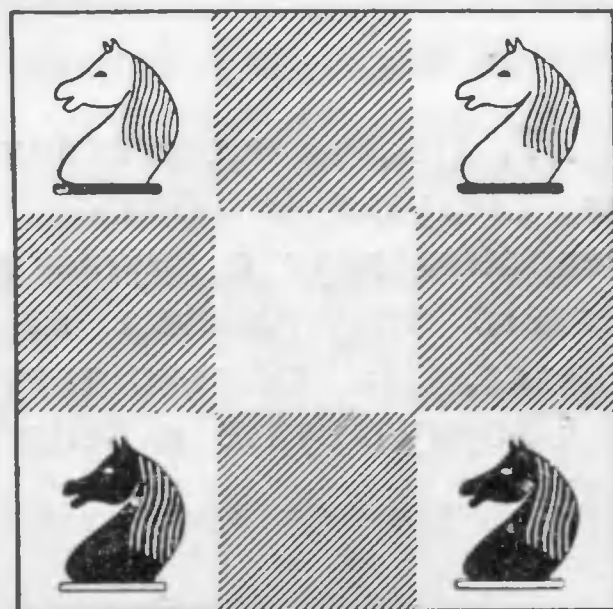
$$9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, 9, \dots \quad (2)$$

Требуется указать закон, описывающий чередование чисел последовательности (2).

На каком месте этой последовательности впервые появится число 81 и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности — 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36?

И. М. Гельфанд (Москва)

41. В углах шахматной доски размером 3×3 клетки стоят 4 коня: два белых и два черных (рис. 1). Какое наименьшее число шахматных ходов можно сделать, чтобы белые кони стали на место черных, а черные на место белых?



Н. Е. Дюдени (США) [заимств.]

Рис. 1.

42. Даны 4 целых положительных числа a_0, b_0, c_0, d_0 . Составляем новую четверку чисел: $a_1 = |a_0 - b_0|$, $b_1 = |b_0 - c_0|$, $c_1 = |c_0 - d_0|$ и $d_1 = |d_0 - a_0|$; затем числа $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$ и $d_2 = |d_1 - a_1|$ и т. д. Можно доказать, что, начиная с некоторого номера n , все получающиеся таким путем числа a_n, b_n, c_n и d_n обратятся в нуль¹⁾.

¹⁾ См., например, Д. О. Шклярский и др., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 1, М., 1959, задача 89; Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, М., 1954, стр. 18.

Остается ли в силе утверждение задачи в том случае, если числа a_0, b_0, c_0, d_0 — рациональные, но не обязательно целые? А если некоторые из них (а может быть, и все) — иррациональные?

А. А. Кириллов (Москва)

43. Перечислить все многогранники, у которых равны все грани и равны (или симметричны) все многогранные углы.

44. На сторонах произвольного четырехугольника вне него построены квадраты. Доказать, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, перпендикулярны и равны по длине.

45. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = y^2.$$

В. Подсыпанин (Тула)

46. Доказать тождество

$$1 + C_{m+1}^{N-n} \frac{N-n}{N-1} + C_{m+2}^{N-n} \frac{(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)} + \dots \\ \dots + C_{m+N-n}^{N-n} \frac{(N-n)(N-n-1)\dots 2 \cdot 1}{(N-1)(N-2)\dots (n-1)n} = \frac{N(N+1)\dots(N+m)}{n(n+1)\dots(n+m)}.$$

М. Тер-Мкртчян (Ереван)

47. Несамопересекающийся n -угольник разбит на сеть треугольников следующим образом: внутри него выбраны m точек и эти точки соединены друг с другом и с вершинами n -угольника, причем внутри каждого треугольника не проходит ни одной части соединяющего отрезка. На сколько треугольников разобьется при этом n -угольник?

Сформулируйте и решите соответствующую стереометрическую задачу.

Ю. И. Кузьмин (Москва)

Б. Задачи повышенной трудности

26. Квадрат двумя способами разбит на 100 равновеликих частей. Доказать, что можно выбрать 100 точек так, чтобы в каждой части первого разбиения и в каждой части второго разбиения оказалось ровно по одной из выбранных точек.

Г. Вейль (США) [заимств.]

27. Можно ли разбить натуральный ряд чисел на две части так, чтобы ни одна часть не содержала никакой бесконечной арифметической прогрессии?

28. Доказать, что для любого натурального N найдется такой номер n , что числитель несократимой дроби $\frac{A_n}{B_n}$, равной

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n},$$

делится на 2^N .

Д. К. Фаддеев (Ленинград)

29. а) На плоскости даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 . Строятся: точка M_1 , симметричная произвольно заданной точке M относительно прямой l_1 ; точка M_2 , симметричная M_1 относительно прямой l_2 ; точка M_3 , симметричная M_2 относительно l_1 ; точка M_4 , симметричная M_3 относительно l_2 , и т. д. Докажите, что точки $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ либо совпадают с n вершинами правильного n -угольника, либо никакие две из этих точек не совпадают и все они заполняют всюду плотно некоторую окружность.

б) В пространстве даны три прямые l_1, l_2 и l_3 , пересекающиеся в одной точке. Произвольная точка M последовательно отражается от этих прямых (M_1 симметрична M относительно l_1 , M_2 симметрична M_1 относительно l_2 , M_3 симметрична M_2 относительно l_3 , M_4 симметрична M_3 относительно l_1 и т. д.). Что можно сказать о полученном таким способом множестве точек $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$?

В. Проблемы

11. Пусть O — произвольный узел сети равных квадратов на плоскости (бумага «в клетку»). Сколько существует несамопересекающихся ломаных, составленных из отрезков этой сети, которые выходят из данного узла O и имеют данную длину N ?

Нетрудно видеть, что число всех возможных таких (не только несамопересекающихся!) ломаных равно $4 \cdot 3^{N-1}$; было бы интересно получить какие-либо оценки числа $K(N)$ несамопересекающихся ломаных при большом N , лучшие, чем оценка $K(N) < 4 \cdot 3^{N-1}$.

Аналогичная пространственная задача представляет интерес для химии полимеров.

В. И. Арнольд (Москва)

12. Пусть R_i и r_i ($i=1, 2, 3$) — расстояния от точки O , находящейся внутри некоторого треугольника, до его вершин и до сторон (рис. 2). Известное неравенство Эрдеша-Морделла утверждает, что средние арифметические $A(x) = A(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ этих расстояний таковы, что $A(R) \geq 2A(r)$; при этом равенство достигается лишь в том случае, когда O — центр правильного треугольника¹⁾.

¹⁾ См. Л. Фейеш-Тот, Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., 1958, гл. I, § 5 и гл. II, § 2 (ср. также заметку З. А. Скопеца на стр. 151 настоящего выпуска).

Аналогичные неравенства имеют место для *среднего геометрического* $G(x) = G(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ и для *среднего гармонического* $H(x) = H(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3}$: $G(R) \geq 2G(r)$, $H(R) \geq 2H(r)$.

Недавно А. Флориан¹⁾ доказал, что эти неравенства могут быть обобщены на произвольное *степенное среднее* $M_k(x) = M_k(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k}{3}\right)^{1/k}$, где $|k| \leq 1$ [$M_1 = A$, $M_{-1} = H$, $M_0 = G$]; $M_k(R) \geq 2M_k(r)$ (знак равенства — лишь в тех случаях, когда O есть центр правильного треугольника).

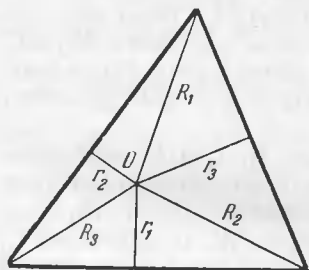


Рис. 2.

Естественно поставить аналогичные задачи для пространства. Однако напрашивающееся обобщение неравенства Эрдеши — Морделла: $A(R_1, R_2, R_3, R_4) \geq 3A(r_1, r_2, r_3, r_4)$, где R_i и r_i — расстояния внутренней точки некоторого тетраэдра соответственно до его вершин и граней, не имеет места; оно заменяется более сложным соотношением: $A(R) > \sqrt[3]{8} A(r)$. Можно поставить задачу: *найти минимальное отношение* $\frac{M_k(R)}{M_k(r)}$ ($|k| \leq 1$). Но более

перспективной представляется другая задача. Для тетраэдра выполняется неравенство $A(R) \geq 3H(r)$ (равенство в случае, когда O — центр правильного тетраэдра) и *правдоподобна следующая гипотеза* (по крайней мере, при $0 \leq k \leq 1$):

$$M_k(R) \geq 3M_{-k}(r).$$

Попытку доказать это неравенство можно начать с частного случая $G(R) \geq 3G(r)$.

¹⁾ A. Florian, Zu einem Satz von P. Erdős, Elemente der Mathematik 13, № 3, 1958, стр. 55—58.

²⁾ В случае $k=0$ раскрываем неопределенность $M_0(x) = 1^\infty$ по правилу Лопиталя:

$$L = \ln M_k(x) = \ln \left(\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k}{3} \right)^{1/k};$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} L = \frac{1}{k} [\ln(x_1^k + x_2^k + x_3^k) - \ln 3] = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x_1^k \ln x_1 + x_2^k \ln x_2 + x_3^k \ln x_3}{x_1^k + x_2^k + x_3^k} = \frac{\ln(x_1 x_2 x_3)}{3}; \quad M_0(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = G(x).$$

(См. также В. И. Левин, Элементарное доказательство одной теоремы теории средних, «Математическое просвещение», вып. 3, 1958, стр. 177—181.)

³⁾ Та же книга Л. Фейеш-Тота, гл. V, § 3, а также: N. D. Kazarinoff, D. K. Kazarinoff's inequality for tetraedre, Michigan Mathematical Journal, 4, № 2, 1957, стр. 99—104.

Другие содержательные задачи возникают при замене треугольника и тетраэдра произвольным выпуклым многоугольником и многогранником.

2. Задачи по высшей математике

А. Задачи средней трудности

29. В четырех вершинах квадрата со стороной 1 сидят черепахи 1, 2, 3 и 4 (рис. 3). В определенный момент все они начинают двигаться с одной и той же постоянной скоростью v , причем черепаха 1 ползет прямо на черепаху 2 (непрерывно меняя направление движения в связи с изменением положения 2), 2 ползет в направлении черепахи 3, 3 — в направлении 4 и 4 — в направлении 1. Через сколько времени встретятся черепахи? Указать траектории их движения.

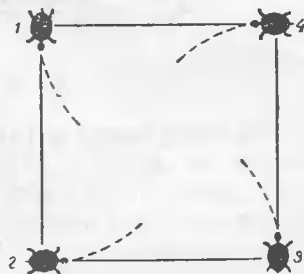


Рис. 3.

30. Доказать, что стороны и диагонали сферического четырехугольника

$ABCD$ связаны соотношением (под AB понимается дуга \widehat{AB} и т. д.):

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos AB & \cos AC & \cos AD \\ \cos AB & 1 & \cos BC & \cos BD \\ \cos AC & \cos BC & 1 & \cos CD \\ \cos AD & \cos BD & \cos CD & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В. Ф. Иванов (Сан-Карлос, Калифорния, США)

31. Доказать, что если элементы квадратной симметрической матрицы четного порядка $2n$ удовлетворяют соотношениям:

$$a_{2k-1, 2l-1} = a_{2k, 2l}, \quad a_{2k-1, 2l} = -a_{2k, 2l-1},$$

то характеристический многочлен этой матрицы является полным квадратом.

М. И. Граев (Москва)

32. Даны неограниченная последовательность действительных чисел m_1, m_2, m_3, \dots и число α , заключающееся между 0 и 1. Доказать, что в любом (сколь угодно малом по длине!) промежутке найдется такое число τ , что последовательность дробных частей

$$\{m_i \tau\} = m_i \tau - [m_i \tau] \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

чисел $m_1 \tau, m_2 \tau, m_3 \tau, \dots$ будет содержать последовательность, сходящуюся к α .

Н. А. Лебедев (Ленинград)

33. Каким условием должны быть связаны коэффициенты уравнения

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \dots + (-1)^n a_n = 0$$

для того, чтобы один из его корней был равен сумме всех остальных?

А. М. Лопиш (Москва)

34. Существует ли такая последовательность положительных чисел c_1, c_2, c_3, \dots , что ряд

$$\frac{c_2 + 1}{c_1} + \frac{1}{2} \frac{c_3 + 1}{c_2} + \frac{1}{3} \frac{c_4 + 1}{c_3} + \dots + \frac{1}{n} \frac{c_{n+1} + 1}{c_n} + \dots$$

сходится?

Я. И. Житомирский и Б. С. Митягин (Москва)

35. Окружность и равнобочная гипербола пересекаются в четырех точках A, B, C и D . Доказать, что если AB является диаметром окружности, то CD есть диаметр гиперболы, и обратно: если AB является диаметром гиперболы, то CD есть диаметр окружности.

З. А. Скопец (Ярославль)

Б. Задачи повышенной трудности

24. Пусть Φ — произвольное непрерывное взаимно-однозначное преобразование окружности с центром O , переводящее произвольную точку M окружности в точку M_1 , точку M_1 в точку M_2 , точку M_2 в точку M_3 и т. д. Углы, образуемые радиусами $OM, OM_1, OM_2, OM_3, \dots$ с неподвижным радиусом OA окружности, обозначим через $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$; при этом пусть, для определенности, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \alpha_1 - \alpha < 2\pi$, $0 \leq \alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi, \dots$. Доказать, что:

а) Существует предел $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n}$, и этот предел («угол поворота» Φ) не зависит от выбора точки M .

б) Если угол поворота $\mu = \frac{p}{q}$ рационален, то найдется такая точка M окружности, что $M_q = M$; если же μ иррационально, то $M_n \neq M$ ни при каких n и M (за единицу измерения углов здесь принимается полная окружность).

А. Пуанкаре (Франция) [заимств.]

25. В n -мерном евклидовом пространстве даны два симплекса $\mathfrak{A} = \{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\mathfrak{B} = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Найти необходимые и достаточные условия, при которых существуют подобные \mathfrak{A} и \mathfrak{B} симплексы $\mathfrak{A}' = \{A'_0, A'_1, A'_2, \dots, A'_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{B'_0, B'_1, B'_2, \dots, B'_n\}$, вписанные в одну гиперболу и такие, что прямые $A'_0 B'_0, A'_1 B'_1, A'_2 B'_2, \dots, A'_n B'_n$ пересекаются в одной точке.

В. В. Гавел (Брно, Чехословакия)

26. Имеется n полиномов

$$\begin{aligned} P_1 &= A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \dots + K_1 x^n, \\ P_2 &= A_2 + B_2 x + C_2 x^2 + \dots + K_2 x^n, \\ &\vdots \\ P_n &= A_n + B_n x + C_n x^2 + \dots + K_n x^n \end{aligned}$$

степени $m \leq n-1$. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} P_1(x_1) & P_1(x_2) & \dots & P_1(x_n) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & \dots & P_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_n(x_1) & P_n(x_2) & \dots & P_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \dots & \dots & K_1 \\ A_2 & B_2 & \dots & \dots & K_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & \dots & \dots & K_n \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \dots & \sigma_1 & 1 \\ 0 & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ & 0 & \dots & \sigma_n & \dots & \sigma_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные n чисел, а $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — коэффициенты уравнения $x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + \sigma_n = 0$, корнями которого являются числа x_1, x_2, \dots, x_n , т. е. величины, лишь знаками отличающиеся от основных симметрических функций чисел x_1, x_2, \dots, x_n .

М. З. Соломяк (Ленинград)

27. Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного, регулярная в круге $|z| < 1$ и обращающаяся в этом круге в нуль лишь в точке $z=0$, где она имеет корень порядка n . Доказать, что:

а) $[\overline{\ln |f(z)|}]^2 \geq \frac{1}{4} n^2$; б) $[\overline{\arg f(z)}]^2 \geq \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{2}\right) n^2$;

в) $[\overline{\ln f(z)}]^2 \geq \left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right) n^2$,

где черта сверху всюду означает *среднее значение* соответствующей величины

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\pi} \iint_{|z| \leq 1} f(z) d\sigma$$

($d\sigma$ — элемент площади круга $|z| \leq 1$). Для каких функций достигается равенство в формулах а), б) и в)?

В. И. Левин (Москва)

28. Пусть a_1, a_2, a_3, \dots — последовательность положительных чисел и $f(x)$ — положительная монотонная функция, такие, что $a_1 + a_2 +$

$$+ a_3 + \dots = \infty, \quad \int_{a_1}^{\infty} f(x) dx = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)}{f(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} = 1$$

Доказать, что

$$a_1 f(a_1) + a_2 f(a_1 + a_2) + \dots + a_n f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \sim \int_{a_1}^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} f(x) dx$$

(\sim — знак эквивалентности; последнее соотношение означает, что отношение его левой и правой частей при $n \rightarrow \infty$ стремится к 1).

В частности, полагая $a_n \equiv 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, получаем известное соотношение

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n.$$

М. Б. Барбан (Ташкент)

В. Проблемы

11. Рассмотрим систему $n+1$ линейных уравнений с $m+1 < n+1$ неизвестными $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ и $n-m+1$ коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-m}$ при этих неизвестных:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 x_0 & & & & & & = b_0, \\ a_1 x_0 + & a_0 x_1 & & & & & = b_1, \\ a_2 x_0 + & a_1 x_1 + & a_0 x_2 & & & & = b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-m} x_0 + a_{n-m-1} x_1 + & \dots & + a_0 x_{n-m} & & & & = b_{n-m}, \\ & a_{n-m} x_1 + a_{n-m-1} x_2 + & \dots & + a_0 x_{n-m+1} & & & = b_{n-m+1}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & a_{n-m} x_n & = b_n, \end{array}$$

где все $a_i (i=0, 1, \dots, n-m)$ и $b_j (j=0, 1, \dots, n)$ — целые числа. Доказать, что если числа a_0, a_1, \dots, a_{n-m} взаимно простые, то решение этой системы (если оно существует) обязательно будет целочисленным; другими словами, никакая система значений x_0, x_1, \dots, x_m , где хоть одно из чисел $x_k (k=0, 1, \dots, m)$ не является целым, не может удовлетворять системе.

Автору задачи удалось доказать ее утверждение обходным путем; предлагается найти прямое доказательство.

Л. М. Фридман (Тула)

Исправление

В формулировке задачи 24 по элементарной математике повышенной трудности («Математическое просвещение», вып. 4, стр. 245, строка 13 снизу) вместо напечатанных слов «не может превышать» должно быть:

не может быть меньше, чем

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Задачи по элементарной математике

А. Задачи средней трудности

4. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Сколько есть полей, на которых он может оказаться через n ходов?

В. А. Залгаллер (Ленинград)

Приводим решение автора задачи.

Пусть $N(n)$ — число клеток, на которых конь может оказаться через n ходов. Непосредственный подсчет показывает, что $N(0) = 1$, $N(1) = 8$, $N(2) = 33$ (рис. 1), $N(3) = 76$ (рис. 2); на рисунках звездочками отмечены те поля доски, куда может попасть конь через 2 или 3 хода, исходя из центрального поля, обозначенного кружком (предполагаем его черным). Рис. 2 показывает, что при $n = 3$ отмеченные клетки-звездочки заполняют без просветов все белые поля восьмиугольника, на каждой стороне которого имеется по 4 белых клетки [как

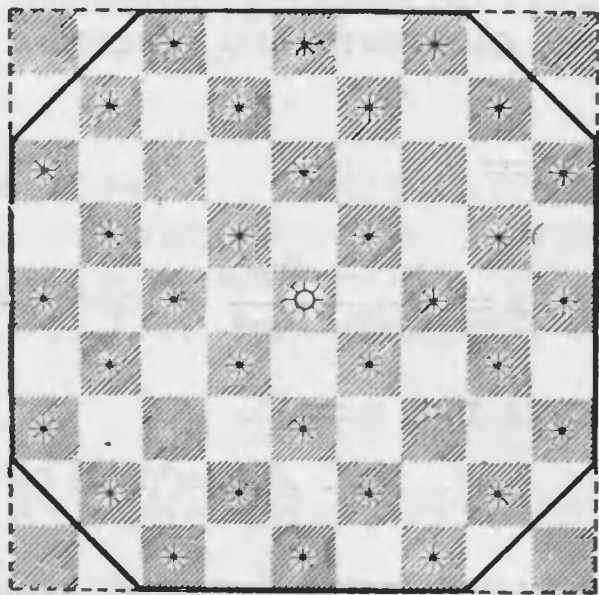


Рис. 1.

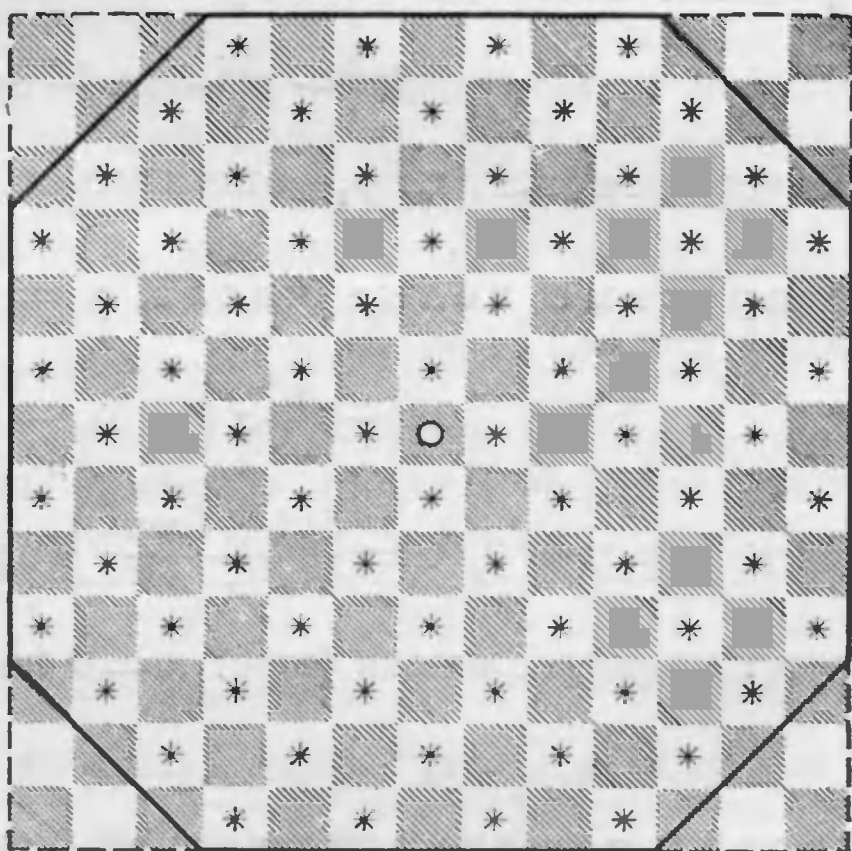


Рис. 2.

видно из рис. 1, при $n = 2$ в аналогичном восьмиугольнике есть еще 4 пропущенных поля]. Методом математической индукции можно показать, что при $n \geq 3$ отмеченные клетки заполнят без просветов все одноцветные поля восьмиугольника с $(n + 1)$ -й клеткой того же цвета на каждой стороне. Действительно, если взять 8-угольник с 5 черными полями на каждой стороне, то из любого черного поля, лежащего внутри него, конь сможет попасть в какое-либо белое поле 8-угольника, изображенного на рис. 1, и, следовательно, обратно

можно указать такое белое поле 8-угольника на рис. 1, из которого конь попадет в любое черное поле увеличенного 8-угольника. Этот же прием можно провести, исходя от 8-угольника с n одноцветными клетками на каждой стороне.

Нетрудно подсчитать число одноцветных полей такого 8-угольника. Дополним его до квадрата со стороной в $4n+1$ клеток (см. штриховые линии на рис. 1 и 2). Число одноцветных клеток в нем, очевидно, равно $\frac{(4n+1)^2 \pm 1}{2}$, где знак «+» отвечает случаю четного n , а знак «-» случаю нечетного n . При этом мы присчитываем лишние («угловых») полей

$$4 \cdot [(n-1) + (n-3) + \dots] = \begin{cases} n^2, & \text{если } n \text{ четно;} \\ n^2 - 1, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Поэтому искомое число полей равно

$$\frac{(4n+1)^2 \pm 1}{2} - n^2 = \frac{(4n+1)^2 - 1}{2} - (n^2 - 1) = 7n^2 + 4n + 1.$$

$$\text{Таким образом, } N(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0; \\ 8 & \text{при } n=1; \\ 33 & \text{при } n=2; \\ 7n^2 + 4n + 1 & \text{при } n \geq 3. \end{cases}$$

Неполное решение прислала Н. Руденко (Москва).

12. При каких рациональных x выражение $3x^2 - 5x + 9$ будет представлять собой квадрат рационального числа?

Первое решение. В задаче требуется найти все рациональные решения (x, y) ($y \geq 0$) неопределенного уравнения $3x^2 - 5x + 9 = y^2$. Очевидно, что одно решение имеет вид $x=0, y=3$. Положим $x=x_1, y=y_1+3$; тогда получим:

$$3x_1^2 - y_1^2 - 5x_1 - 6y_1 = 0.$$

Для *всякого* решения (x_1, y_1) , отличного от $(0, 0)$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые целые числа, $y_1 = x_1 \cdot \frac{m}{n}$; следовательно, имеем:

$$3x_1^2 - \frac{m^2}{n^2} x_1^2 - 5x_1 - 6 \frac{m}{n} x_1 = 0,$$

или, поскольку $x \neq 0, x_1 = \frac{5n^2 + 6mn}{3n^2 - m^2}$. Формула $x = \frac{5n^2 + 6mn}{3n^2 - m^2}$ и дает полный ответ на вопрос задачи (ответ $x=0$ получается при $n=0$).

У. Давыдов (Гомель)

Второе решение. Если (x, y) — рациональная точка кривой второго порядка $y^2 = 3x^2 - 5x + 9$, то отношение $k = \frac{y-3}{x}$ рационально (может быть, бесконечно). С другой стороны, если k рационально, то прямая $y = kx + 3$ пересекает кривую в двух рациональных точках: $(0, 3)$ и $(\frac{6k+5}{3-k^2}, \frac{3k^2+5k+9}{3-k^2})$. Отсюда следует, что все рациональные точки кривой отвечают таким x , что $x = \frac{6k+5}{3-k^2}$.

В. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский)

13. Существует ли на прямой такое множество \mathbb{M} точек, что на каждом фиксированном расстоянии a от каждой точки A множества лежит в точности одна точка \mathbb{M} ?

Пусть такое множество \mathbb{M} существует, A_0 — точка этого множества. Точку, удаленную от A_0 на a вправо, обозначаем через B_a , а на a влево — через C_a ; под A_a мы будем понимать ту из точек B_a, C_a , которая принадлежит множеству \mathbb{M} .

Пусть $a=1$ или $a=2$. Если, например, $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$ (рис. 3, а) или $A_1 \equiv C_1, A_2 \equiv C_2$, то, очевидно, на расстоянии 1 от точки A_1 будут находиться две точки \mathbb{M} (рис. 3, а). Следовательно, должно быть либо $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv C_2$, либо $A_1 \equiv C_1, A_2 \equiv B_2$; предположим для определенности, что имеет место первое.

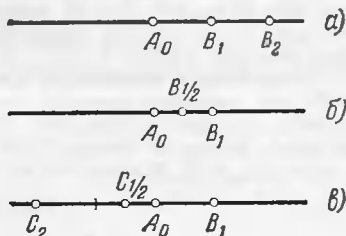


Рис. 3.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}$. Легко проверить (рис. 3, б), что если $A_{1/2} \equiv B_{1/2}$, то от точки $B_{1/2}$ две точки \mathbb{M} удалены на расстояние $\frac{1}{2}$, а если $A_{1/2} \equiv C_{1/2}$ (рис. 3, в), то от точки $C_{1/2}$ две точки \mathbb{M} удалены на расстояние $\frac{1}{2}$.

Поэтому удовлетворяющего условиям задачи множества \mathbb{M} не существует.

Л. Н. Бескин (Москва)

14. Пусть $f(x)$ — некоторая функция, непрерывная и монотонная в определенном интервале (или на всей прямой); $g(x)$ — функция, обратная $f(x)$ [так что $f(g(x)) = g(f(x)) = x$]; $G(x)$ — функция, обратная функции $F(x) = mf(kx + b) + a$. Выразить $G(x)$ через $g(x)$.

И. Я. Танатар (Москва)

Первое решение. Пусть $y = mf(kx + b) + a$. Искомая функция $G(x) = u$ определяется с помощью уравнения $mf(ku + b) + a = x$. Отсюда

$$\frac{x-a}{m} = f(ku + b), \text{ т. е. } ku + b = g\left(\frac{x-a}{m}\right) \text{ и } u = \frac{1}{k} \left[g\left(\frac{x-a}{m}\right) - b \right].$$

И. Я. Танатар (Москва)

Второе решение. Чтобы получить график $F(x)$, следует график $f(x)$:

а) сжать в k раз к оси x и сдвинуть на $-\frac{b}{k}$ по оси x ;

б) растянуть в m раз от оси y и сдвинуть на a по оси y .

График $G(x)$ получается из графика $F(x)$ [и график $g(x)$ — из графика $f(x)$] переменной осей Ox и Oy . Поэтому график $G(x)$ получится, если график $g(x)$:

а) растянуть в m раз от оси x и сдвинуть на a по оси x ;

б) сжать в k раз к оси y и сдвинуть на $-\frac{b}{k}$ по оси y .

$$\text{Но это означает, что } G(x) = \frac{1}{k} \left[g\left(\frac{x-a}{m}\right) - b \right].$$

Л. Н. Бескин (Москва)

15. Вычеркнуть 100 цифр из числа 12345678910111213...979899100 так, чтобы полученное после этого число было возможно большим.

В данном числе 192 цифры, а в оставшемся — 92.

Первые цифры ответа должны быть возможно большими. Мы можем оставить в начале 5 девяток (из чисел 9, 19, 29, 39 и 49), вычеркнув при этом $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ цифры; следующая цифра не может быть девяткой, так как для этого нам пришлось бы вычеркнуть еще 19 цифр (т. е. всего $84 + 19 = 103 > 100$).

Ближайшая к имеющимся цифрам восьмерка будет в числе 58; для того чтобы она следовала непосредственно за девятками, пришлось бы вычеркнуть 17 цифр, что тоже невозможно ($84 + 17 = 101$). Итак, вычеркиваем 15 цифр до семерки в числе 57 (всего $84 + 15 = 99$ цифр). Далее следует вычеркнуть 5 в числе 58. Итак, искомое число:

9999978596061...100.

В. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский)
Аналогичное решение прислал *Л. Н. Бескин* (Москва)

16. По кругу выписаны p крестиков и q нуликов; число пар стоящих рядом крестиков обозначим через a , а число пар стоящих рядом нуликов — через b . Доказать, что $a - b = p - q$.

Будем обходить наш круг, например, по часовой стрелке, начиная с нулика, пока снова не придем к этому же нулику. При этом всех переходов от нулика (к нулику или крестiku) будет столько, сколько нуликов, т. е. q . В числе этих переходов будут переходы к нулику — их столько, сколько пар рядом стоящих нуликов, т. е. b . Тогда переходов от нулика к крестiku будет $q - b$.

Аналогично при таком же обходе можно подсчитать число переходов от крестика к нулику — их будет $p - a$.

Но число переходов от нулика к крестiku равно числу переходов от крестика к нулику, так как по завершении обхода мы должны остановиться опять на исходном нулике. Значит, $q - b = p - a$, откуда

$$a - b = p - q.$$

В. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский)

Решение задачи методом математической индукции (по числу q) прислал *Л. Н. Бескин* (Москва).

17. Какое наибольшее и наименьшее значения может иметь модуль $|z|$ комплексного числа z , если $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$?

1° Для чисел $z, \bar{z}, -z$ и $-\bar{z}$ имеем: $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$ и $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|-z - \frac{1}{z}\right| = \left|-\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right|$. Поэтому достаточно рассмотреть лишь то из этих чисел, которое лежит в первой четверти.

2° $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; если $|z|$ достигает наибольшего возможного значения, то $\left|\frac{1}{z}\right|$ — наименьшего. Поэтому достаточно найти те z , модуль которых является наибольшим возможным, в частности $|z| \geq \left|\frac{1}{z}\right|$.

3° Пусть задано число $\varphi = \arg z, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $r = |z|$ определяется из условия $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$ (рис. 4):

$$a^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\varphi = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 + 4 \cos^2 \varphi = \left(r - \frac{1}{r} \right)^2 + 4 \cos^2 \varphi.$$

Так как $r \geq \frac{1}{r}$ (см. 2°), то с ростом r растет и разность $r - \frac{1}{r}$, и наоборот. Но $\left(r - \frac{1}{r} \right)^2 = a^2 - 4 \cos^2 \varphi \leq a^2$; при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $\left(r - \frac{1}{r} \right)^2 = a^2$. При этом $r - \frac{1}{r} = a, \quad r = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4})$.

Соответственно этому, наибольшее значение $|z| = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4})$ достигается при $z = \frac{i}{2} (a + \sqrt{a^2 + 4})$, а наименьшее $|z| = \frac{1}{2} (\sqrt{a^2 + 4} - a)$ — при $z = -\frac{i}{2} (\sqrt{a^2 + 4} - a)$.

Л. Н. Бескин (Москва)

Неполное решение прислал У. Давыдов (Гомель). Близкое к приведенному решение задачи можно вывести из рассмотрения кривой $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$; полагая $z = x + iy$, можно переписать уравнение этой кривой в виде $a^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 1$.

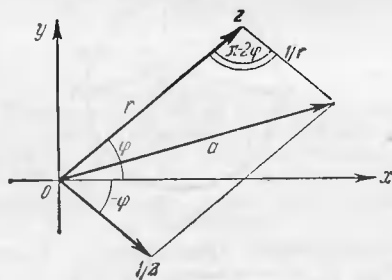


Рис. 4.

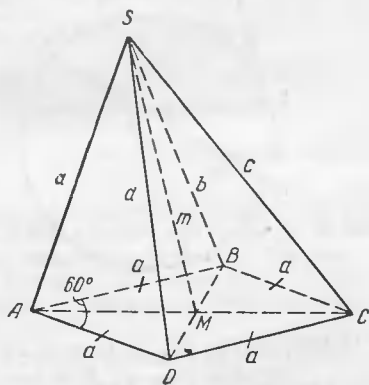


Рис. 5.

18. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит ромб $ABCD$ со стороной a и углом $\angle BAD = 60^\circ$; боковое ребро SA пирамиды также равно a . Доказать, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны SB, SC и SD .

З. А. Скопец (Ярославль)

Обозначим $SB = b, SC = c, SD = d, SM = m$ (рис. 5). Из треугольников SBD и SAC по формуле для медианы треугольника находим $m^2 = \frac{2b^2 + 2d^2 - a^2}{4}$ и (так как $AC^2 = 4a^2 - BD^2 = 3a^2$) $m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - 3a^2}{4}$. Из сравнения этих двух формул получаем $b^2 + d^2 = c^2$, откуда и вытекает утверждение задачи.

В. Рабинович (Петропавловск-Казахстанский)

Близки к этому решения *Л. Н. Бескина* (Москва) и *Э. Г. Готмана* (Печора), опирающиеся на теорему косинусов, а также решение автора задачи *З. А. Скопеца*, использующее аппарат векторной алгебры.

2. Задачи по высшей математике

А. Задачи средней трудности

17. К окружности Σ из внешней точки P проведены касательные PT_1 и PT_2 (T_1 и T_2 — точки касания), и внутри Σ построена дуга T_1T_2 окружности с центром P (рис. 6). Произвольная точка S этой дуги соединена с точками T_1 и T_2 . Доказать, что точки R_1 и R_2 , в которых прямые ST_1 и ST_2 пересекают второй раз окружность Σ , диаметрально противоположны. Истолковать полученный результат, принимая окружность Σ за абсолют модели Клейна плоскости Лобачевского.

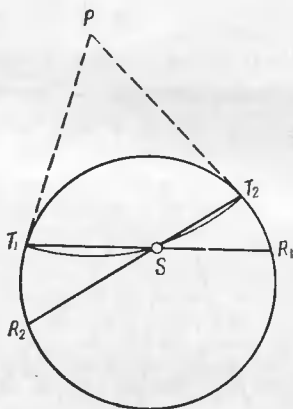


Рис. 6.

Я. С. Дубнов (Москва)

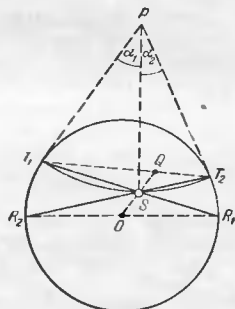


Рис. 7.

1° PST_1 , PST_2 и PT_2T_1 (рис. 7) — равнобедренные треугольники. Поэтому $\angle PT_2S = \frac{\pi - \alpha_2}{2}$, $\angle PT_1S = \frac{\pi - \alpha_1}{2}$, $\angle PT_2T_1 = \frac{\pi - \alpha_1 - \alpha_2}{2}$. Будем отсчитывать дуги только против часовой стрелки. Тогда $\widehat{T_2R_2} = 2(\angle PT_2S) = \pi - \alpha_2$, $\widehat{R_1T_1} = \pi - \alpha_1$, $\widehat{T_2T_1} = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Отсюда имеем:

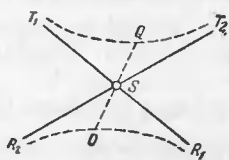


Рис. 8.

$$\begin{aligned} \widehat{R_1R_2} &= \widehat{R_1T_1} + \widehat{T_2R_2} - \widehat{T_2T_1} = \\ &= (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) - [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)] = \pi, \end{aligned}$$

т. е. точки R_1 и R_2 диаметрально противоположны.

2° На рис. 8 изображена условно картина, которую мы получим, приняв внутренность Σ за модель Клейна плоскости Лобачевского. Прямые R_1R_2 и T_1T_2 — неевклидовы параллели к сторонам угла, образованного прямыми T_1R_1 и T_2R_2 , — будут симметричны (в смысле геометрии Лобачевского) относительно точки S ; отсюда, в частности, следует, что (неевклидов) отрезок OQ делится в точке S пополам.

Так как дуга T_1ST_2 окружности представляет собой изображение неевклидовой прямой на модели Пуанкаре, то отсюда вытекает, что, сопоставив каждой точке Q модели Клейна неевклидовой геометрии Лобачевского такую точку S , что $OS = \frac{1}{2} OQ$ (расстояния понимаются в смысле неевклидовой геометрии; переход от точек Q к точкам S можно было бы назвать «неевклидовой гомотетией»), мы переведем неевклидову прямую в прямую модели Пуанкаре, т. е. модель Клейна — в модель Пуанкаре¹).

Решение (неполное) прислал Л. Н. Бескин (Москва)

Б. Задачи повышенной трудности

2. Пусть $N(a_1, a_2, \dots, a_n, M)$ есть число решений в целых положительных числах неопределенного уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = M, \quad (1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — целые положительные числа, взаимно простые между собой. Доказать, что при больном M число N имеет порядок

$$\frac{M^{n-1}}{(n-1)! a_1 a_2 \dots a_n} \quad (2)$$

$$\left(\text{т. е. что } \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N(a_1, a_2, \dots, a_n, M)}{M^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)! a_1 a_2 \dots a_n} \right)^2.$$

А. О. Гельфонд (Москва)

Данная задача легко сводится к следующей: показать, что число $S(M)$ решений уравнения (1) в целых неотрицательных числах при больном M имеет порядок (2). В самом деле, как указывает, например, С. В. Огай (Фрунзе), при $M_1 = M - a_1 - a_2 - \dots - a_n > 0$ число решений уравнения (1) в целых положительных числах равно числу решений в целых неотрицательных числах x'_1, x'_2, \dots, x'_n уравнения

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + \dots + a_nx'_n = M - a_1 - a_2 - \dots - a_n = M_1 \quad (3)$$

[переход от (1) к (3) осуществляется с помощью подстановки $x_i = x'_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$]. Так как нас интересует вопрос о порядке числа решений при большем M , то условие $M_1 > 0$ не приводит к каким-либо ограничениям.

Таким образом, основной задачей является доказательство оценки (1) для числа неотрицательных решений. Эта задача является главным местом всех присланных решений. И. И. Жогин (Шадринск) отмечает, что эта задача имеется в книге Г. Полна и Г. Сега «Задачи и теоремы из анализа», М., 1957, отд. I, задача 27. Большинство полученных решений близко к решению, приведенному в этой книге. Существенно отличное решение сформулированной в начале задачи, аналогичное тому, которое имел в виду автор задачи, указывает Л. В. Ильков (Москва); это решение и приводится ниже.

¹) См. заметку на стр. 56 и 72 наст. выпуска. (Ред.)

²) В тексте задачи («Математическое просвещение», вып. 1, стр. 226) имеется очевидная опечатка.

Число $C(M)$ целых неотрицательных решений уравнения (1) равно коэффициенту при z^M в разложении в степенной ряд функции

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - z^{a_k}} \quad (|z| < 1)$$

$$\left[\text{ибо } f(z) = \prod_{k=1}^n (1 + z^{a_k} + z^{a_k \cdot 2} + z^{a_k \cdot 3} + \dots) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \dots \sum_{x_n=0}^{\infty} z^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n} \right].$$

Применяя формулу Коши, получим:

$$C(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r < 1} \frac{f(z) dz}{z^{M+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r < 1} g(z) dz, \quad (4)$$

где

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^{M+1}} = \frac{1}{z^{M+1} \prod_{k=1}^n (1 - z^{a_k})}. \quad (5)$$

Функция $g(z)$ аналитична всюду, за исключением конечного числа полюсов, лежащих на окружности $|z| = 1$. Этими полюсами являются точки

$$z = e^{2\pi i \frac{j}{a_k}} = z_{kj} \quad (k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, a_k - 1). \quad (6)$$

Кроме того, $g(z)$ имеет полюс в точке $z = 0$. Так как $\operatorname{res}_{z=0} g(z) = 0$ при $M \geq 1$, то, согласно основной теореме о вычетах,

$$C(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r < 1} g(z) dz = \operatorname{res}_{z=0} g(z) = - \sum_{k,j} \operatorname{res}_{z=z_{kj}} g(z). \quad (7)$$

Порядок полюса $g(z)$ в точке $z = z_{kj}$ равен числу скобок вида $(1 - z^{a_l})$, обращаящихся в нуль при этом z . Пусть этот порядок равен m . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_{kj}} g(z) &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_{kj}} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_{kj})^m g(z)] = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_{kj}} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l C_{m-1}^l (M+1) \dots (M+l) z^{-(M+l-1)} h^{m-l-1}(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$h(z) = \frac{(z - z_{kj})^m}{\prod_{l=1}^m (1 - z^{a_l})}. \quad (9)$$

Функция $h(z)$ имеет производные любого порядка, конечные при $z = z_{kj}$, поэтому из формулы (8) получаем:

$$\operatorname{res}_{z=z_{kj}} g(z) = A_0 + A_1 M + \dots + A_{m-1} M^{m-1} \equiv Q_{m-1}(M),$$

где $Q_{m-1}(M)$ — многочлен от M степени $m-1$.

Итак, если $g(z)$ в точке $z = z_{kj}$ имеет полюс порядка m , то

$$\operatorname{res}_{z=z_{kj}} g(z) = Q_{m-1}(M). \quad (10)$$

В точке $z = 1$ $g(z)$ всегда имеет полюс порядка n ; $h(z)$ для этого полюса принимает вид

$$h(z) = \frac{(z-1)^n}{\prod_{k=1}^n (1-z^{a_k})} = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n (1+z+\dots+z^{a_k-1})}.$$

По формуле (8) получаем, суммируя в обратном порядке:

$$\operatorname{res}_{z=1} g(z) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l-1} C_{n-1}^l (M+1) \dots (M+n-l-1) \times \\ \times \left. \frac{d^l}{dz^l} \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1+z+\dots+z^{a_k-1})} \right|_{z=1}. \quad (11)$$

Таким образом, мы видим, что $\operatorname{res}_{z=1} g(z)$ является полиномом степени $m-1$ относительно M , который мы обозначим через $P_{n-1}(M)$. Вычислив с помощью формулы (11) коэффициенты при старших членах этого полинома, получим:

$$P_{n-1}(M) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a_k} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} M^{n-1} + \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{2(n-2)!} M^{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{3 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2}{24(n-3)!} M^{n-3} + \dots \right\}. \quad (12)$$

Порядок полюсов $g(z)$ в точках $z \neq 1$ существенно зависит от наличия общих делителей у коэффициентов a_i уравнения (1). Если некоторые m из наших чисел имеют общий делитель $d > 1$, а любые $m+1$ взаимно просты, то функция $g(z)$ имеет полюсы порядка m , но не имеет в точках $z \neq 1$ полюсов более высокого порядка. Поэтому из формул (7), (10) и (12) следует:

$$C(M) = P_{n-1}(M) + \sum Q_{m-1}(M). \quad (13)$$

Таким образом, $C(M)$ имеет порядок (2) [ср. (12)]; при $m < n-1$ разность $C(M) - \frac{1}{(n-1)! a_1 \dots a_k} M^{n-1}$ имеет порядок $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{2(n-2)! a_1 a_2 \dots a_k} M^{n-2}$; при

$m < n - 2$ разность $C(M) - \frac{1}{(n-1)! a_1 \dots a_k} M^{n-1} - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{2(n-2)! a_1 a_2 \dots a_k} M^{n-2}$ имеет порядок $\frac{3(\sum a_k)^2 - \sum a_k^2}{24(n-3)! a_1 \dots a_k} M^{n-3}$ и т. д. Если $m = 1$, т. е. все a_i попарно взаимно просты, то остаточный член правой части формулы (13) обращается в константу A_0 . Можно показать, что

$$|A_0| < \sum_{k=1}^n (a_k - 1) \left(\frac{a_k}{\pi} \right)^{n+a_k-2};$$

если $\max_{k=1, \dots, n} a_k = A > 4$, то

$$|A_0| < n\pi \left(\frac{A}{\pi} \right)^{n+A-1}.$$

Решение задачи прислали *И. И. Жогин* (Шадринск), *Л. В. Ильков* (Москва), *С. В. Огай* (Фрунзе), *Ю. А. Шуб-Сизоненко* (Москва); неполное решение получено от *А. В. Дерюгина* (Симферополь), *П. Г. Тихонова* (Караганда).

5¹⁾. Найти все аналитические функции $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющие условию

$$|f(x + iy)| = |f(x) + f(iy)|. \quad (1)$$

Р. М. Робинсон (США) [заимств.]

Из соотношения (1) немедленно следует, что $f(0) = 0$. Пусть

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z. \quad (2)$$

Тогда квадраты правой и левой частей соотношения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} |f(x + iy)|^2 &= \sum_{k, l} c_k \bar{c}_l (x + iy)^k (x - iy)^l, \\ |f(x) + f(iy)|^2 &= \sum_{k, l} c_k \bar{c}_l [x^k + (iy)^k] [x^l + (-iy)^l]. \end{aligned}$$

Приравнявая члены разложений $|f(x + iy)|^2$ и $|f(x) + f(iy)|^2$, имеющие одну и ту же степень m , имеем:

$$\sum_{k+l=m} c_k \bar{c}_l (x + iy)^k (x - iy)^l = \sum_{k+l=m} c_k \bar{c}_l [x^k + (iy)^k] [x^l + (-iy)^l], \quad (3)$$

что при $m > 1$ можно также переписать следующим образом:

$$\operatorname{Re} \sum_{1 \leq l \leq \left[\frac{m}{2} \right]} c_{m-l} \bar{c}_l \{ (x + iy)^{m-l} (x - iy)^l - [x^{m-l} + (iy)^{m-l}] [x^l + (-iy)^l] \} = 0, \quad (4)$$

где член, соответствующий $l = \left[\frac{m}{2} \right]$, следует умножить на $\frac{1}{2}$.

¹⁾ Ср. с сообщением *В. И. Левина*, напечатанным в этом же выпуске «Математического просвещения» (стр. 149).

Пусть $c_1 = c_2 = \dots = c_{p-1} = 0$, $c_p \neq 0$. Тогда наименьшее возможное значение m в соотношении (4): $m = 2p$. Для этого значения получаем:

$$(x + iy)^p (x - iy)^p = [x^p + (iy)^p] [x^p + (-iy)^p],$$

или

$$(x^2 + y^2)^p = \begin{cases} x^{2p} + y^{2p}, & \text{если } p = 2q + 1; \\ (x^p + y^p)^2, & \text{если } p = 4q; \\ (x^p - y^p)^2, & \text{если } p = 4q + 2. \end{cases} \quad (5)$$

Соотношение (5) обращается в тождество только при $p = 1$. Отсюда следует, что $p = 1$; полагая дополнительно, что $c_1 = 1$ (это, разумеется, не уменьшает общности наших рассуждений), имеем:

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (6)$$

Положим теперь в соотношении (4) $m = 3$. Мы будем иметь:

$$\operatorname{Re} \{c_2 (x - iy) [(x + iy)^2 - (x^2 - y^2)]\} = 0,$$

или

$$\operatorname{Re} \{c_2 (x - iy) 2ixy\} = 0,$$

откуда следует, что $c_2 = 0$. Положив в соотношении (4) $m = 4$, получим:

$$\operatorname{Re} \{c_3 (x^2 + y^2) 3ixy\} = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $c_3 = c$ действительно. Полагая далее в соотношении (4) $m = 5, 6, 7, 8, \dots$, находим:

$$c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{3c^2}{10}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{3c^3}{7 \cdot 10}, \dots$$

Таким образом,

$$f(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + c_7 z^7 + \dots,$$

где c действительно, а последующие коэффициенты c_i вычисляемые рекуррентно, являясь степенями c .

Соответственно трем возможностям $c = 0$, $c = -\frac{b^2}{6}$, $c = \frac{b^2}{6}$, из рекуррентных формул выводим, что

$$f(z) = z, \quad f(z) = \frac{1}{b} \sin bz, \quad f(z) = \frac{1}{b} \operatorname{sh} bz. \quad (7)$$

Отказываясь теперь от требования $c_1 = 1$, заключаем, что лишь следующие три аналитические функции удовлетворяют условию (1):

$$Az, \quad A \sin bz, \quad A \operatorname{sh} bz,$$

где b — действительная, A — комплексная постоянные.

Р. М. Робинсон

Из The American Mathematical Monthly 66, № 2, 1957, стр. 83—85.

6. Доказать, что если непрерывная функция $f(x, y)$ двух переменных x и y при любом фиксированном x — многочлен относительно y и при любом фиксированном y — многочлен относительно x , то эта функция является многочленом от двух переменных x и y .

Пусть E_k есть множество значений x , для которых $f(x, y)$ представима в виде многочлена от y степени не выше чем k :

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_k(x)y^k, \quad (1)$$

где $x \in E_k$. Очевидно, что

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset \dots \quad (2)$$

Все эти множества не могут быть конечными, ибо в противном случае их объединение было бы не более чем счетным и не могло бы совпадать с множеством всех действительных чисел. Пусть E_k — первое по порядку бесконечное множество в последовательности (2). Покажем, что на E_k функции $a_0(x)$, $a_1(x)$ представимы в виде многочленов от x . С этой целью выбираем $(k+1)$ произвольных различных чисел y_0, y_1, \dots, y_k . Тогда при $x \in E_k$

$$a_0(x) + a_1(x)y_i + a_2(x)y_i^2 + \dots + a_k(x)y_i^k = f(x, y_i) \quad (3)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k).$$

Правые части системы (3) являются по условию многочленами от x ; определитель системы [определитель Вандермонда $W(y_0, y_1, \dots, y_k)$] отличен от нуля. Следовательно, разрешив систему (3) относительно $a_i(x)$, представим $a_i(x)$ в виде многочленов от x .

Остается показать, что множество E_k совпадает со всей числовой прямой.

Предположим противное; пусть $x_0 \in E_{k+l}$, где $j=0, 1, 2, \dots, l-1$, но $x_0 \notin E_{k+l}$. На множестве E_{k+l} $f(x, y)$ представляется в виде

$$f(x, y) = b_0(x) + b_1(x)y + \dots + b_k(x)y^k + \dots + b_{k+l}(x)y^{k+l}, \quad (4)$$

причем $b_{k+l}(x_0) \neq 0$. Аналогично предыдущему можно показать, что $b_0(x)$, $b_1(x)$, \dots , $b_{k+l}(x)$ на E_{k+l} являются многочленами от x . Для $x \in E_k \subset E_{k+l}$ выполняются одновременно соотношения (1) и (4); из их сопоставления заключаем, что для $x \in E_k$

$$b_0(x) = a_0(x), \dots, b_k(x) = a_k(x), \quad b_{k+1}(x) = 0, \dots, b_{k+l}(x) = 0.$$

Таким образом, $b_{k+l}(x)$, являясь многочленом от x , определенным на множестве E_{k+l} , обращается в нуль на бесконечном множестве E_k , что противоречит тому, что $b_{k+l}(x) \not\equiv 0$.

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x, y)$ является излишним.

М. Б. Балк (Смоленск)

7. Пусть на главной диагонали определителя n -го порядка стоит число x , а на всех остальных местах либо $+1$, либо -1 . Найти наименьшее такое положительное число a , что при всех $x > a$ определитель будет положительным при любом выборе знаков $+$ и $-$.

Рассмотрим следующий определитель n -го порядка, принадлежащий к числу рассматриваемых в этой задаче:

$$\Delta_n^0(x) = \begin{vmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{vmatrix},$$

т. е. определитель $\Delta_n^0(x) = |a_{ij}^0|$ такой, что

$$a_{ij}^0 = \begin{cases} x & \text{при } i=j, \\ -1 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Вычисление значения этого определителя не представляет труда: прибавив все строки к первой, а затем вынес за знак определителя общий множитель $x - n - 1$ элементов первой строки и прибавляя первую строку ко всем другим, найдем:

$$\Delta_n^0(x) = [x - (n - 1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \\ -1 & & & x \end{vmatrix} = [x - (n - 1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x+1 & x+1 & & 0 \\ & x+1 & \ddots & \\ 0 & & & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= [x - (n - 1)] (x + 1)^{n-1}.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\Delta_n^0(x) < 0 \text{ при } x < n - 1, \quad \Delta_n^0(x) = 0 \text{ при } x = n - 1, \quad \Delta_n^0(x) > 0 \text{ при } x > n - 1.$$

Докажем теперь, что *любой определитель* $\Delta_n(x) = |a_{ij}|$, где $a_{ij} = x$, $a_{ij} = \pm 1$ при $i \neq j$, *будет положителен, если только* $x > n - 1$. Действительно, предположим, что $\Delta_n(x) \leq 0$; заменим затем элементы определителя $\Delta_n(x)$, равные $+1$, на t и будем изменять параметр t от $+1$ до -1 . Значение полученного определителя $\Delta_n(t, x) = |a_{ij}(t)|$ будет непрерывно меняться с изменением t , переходя от неположительных значений к положительным (ибо $\Delta_n(1, x) = \Delta_n(x) \leq 0$, $\Delta_n(-1, x) = \Delta_n^0(x) > 0$); поэтому найдется такое значение t_0 ($1 \geq t_0 > -1$), что $\Delta_n(t_0, x) = 0$.

Запишем теперь, что строки определителя $\Delta_n(t_0, x)$ линейно зависимы:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x + \lambda_2 a_{21}(t_0) + \lambda_3 a_{31}(t_0) + \dots + \lambda_n a_{n1}(t_0) &= 0, \\ \lambda_1 a_{12}(t_0) + \lambda_2 x + \lambda_3 a_{32}(t_0) + \dots + \lambda_n a_{n2}(t_0) &= 0, \\ \vdots & \\ \lambda_1 a_{1n}(t_0) + \lambda_2 a_{2n}(t_0) + \dots + \lambda_n x &= 0. \end{aligned}$$

Из i -го из этих уравнений, учитывая, что $|a_{ji}(t_0)| \leq 1$ и $x > n - 1$, получаем:

$$\begin{aligned} |\lambda_i| &= \left| \frac{a_{1i}(t_0) \lambda_1 + a_{2i}(t_0) \lambda_2 + \dots + a_{i-1,i}(t_0) \lambda_{i-1} + a_{i+1,i}(t_0) \lambda_{i+1} + \dots + a_{ni}(t_0) \lambda_n}{x} \right| \leq \\ &\leq \frac{|a_{1i}(t_0)| |\lambda_1| + |a_{2i}(t_0)| |\lambda_2| + \dots + |a_{i-1,i}(t_0)| |\lambda_{i-1}| + \dots + |a_{i+1,i}(t_0)| |\lambda_{i+1}| + \dots + |a_{ni}(t_0)| |\lambda_n|}{x} < \\ &< \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_{i-1}| + |\lambda_{i+1}| + \dots + |\lambda_n|}{n - 1}. \end{aligned}$$

Складывая n подобных неравенств, отвечающих $i = 1, 2, \dots, n$, имеем:

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| < |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|,$$

что невозможно. Полученное противоречие и доказывает невозможность неравенства $\Delta_n(x) \leq 0$. Таким образом, искомое значение числа a равно $n - 1$.

Несколько уточнив эти же рассуждения, можно показать, что при $x = n - 1$ определитель будет $\Delta_n(x) \geq 0$; равенство здесь достигается в том и только в том случае, если определитель $\Delta_n(x)$ распадается на клетки, причем диагональные квадратные клетки имитируют строение определителя $\Delta_n^0(x)$, а осталь-

ные клетки попеременно заполнены положительными и отрицательными единицами:

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \quad x = n-1.$$

Ю. А. Шуб-Сизоненко (Москва)

VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

ДВА НОВЫХ УЧЕБНИКА АЛГЕБРЫ

Я. С. Дубнов

(Москва)

От редакции

За несколько месяцев до кончины Я. С. Дубнов сообщил редакции «Математического просвещения», что он напишет для 4-го выпуска развернутую рецензию на два новых недавно вышедших учебника алгебры (ч. II) для средней школы: 1) А. Н. Барсукова и 2) коллектива авторов под ред. А. И. Маркушевича. Основой для этой рецензии должны были служить те отзывы на эти учебники, которые Я. С. готовил для Учебно-методического совета (УМС) Министерства просвещения РСФСР. Эти отзывы Я. С. написал: первый из них он успел переписать начисто и 28 ноября 1957 г. отправить в УМС, а второй был найден уже после его смерти в непереписанном виде.

Так как эти отзывы имеют общественное значение, то редакция «Математического просвещения» решила их опубликовать, хотя и понимала, что, готовя рецензию для печати, Я. С., несомненно, подверг бы их литературной обработке. При этом редакция сделала лишь следующие изменения. Автор, указывая на отдельные места рецензируемых книг, везде указывал не только страницу, но и строку соответствующего места книги, предполагая, что читающий отзывы одновременно смотрит соответствующий текст книги. Без этого многие замечания рецензента остаются читателю неясными. Редакция опустила вторые координаты (номера строк), а вместо этого в сносках приводит соответствующие цитаты из учебников или их изложение. В отличие от примечаний самого Я. С., эти сноски везде обозначены: «Ред.».

1) А. Н. Барсуков, Алгебра, часть II, Учебник для 8—10 классов средней школы, Учпедгиз, М., 1957, 327 стр., тираж 10 000 экз.

Потребность в новом учебнике алгебры возникла не только из-за того, что несколько изменились программы, но еще и в результате эволюции педагогических взглядов, переросших устаревший учебник А. Киселева. Здесь я имею в виду давно уже признанную необходимость воспитания «функционального мышления», обязательность для культурного человека быть знакомым с идеями высшей математики, наконец требование практики о создании навыков в пользовании числовыми таблицами, графиками и логарифмической линейкой. Одновременно шел процесс, направленный к освобождению школьной математики от балласта вроде (если говорить об алгебре) гипертрофированной техники логарифмических вычислений, формулы бинома, разложения

многочлена на множители и т. п. Подлинно новый учебник призван был отразить не только букву, но и дух новой программы, тенденции ее развития.

Если подойти с этим критерием к учебнику А. Н. Барсукова, то трудно будет усмотреть существенное различие между установками многолетнего редактора учебника А. Киселева, с одной стороны, и автора нового учебника — с другой. Правда, буква программы соблюдена. Осуществлена, сверх того, внешняя модернизация: вместо «относительных» чисел говорится о «рациональных» (смена терминов спорная, но имеющая влиятельных сторонников); термины «одночлен», «многочлен» употребляются в смысле, более привычном для высшей школы; соблюдено предложенное официальной программой разграничение эпитетов «комплексное», «мнимое» и т. п. Чтобы покончить с внешней стороной изложения, скажу, что книга написана доступным и (за исключением отдельных срывов — см. ниже) литературно гладким языком — достоинство отнюдь немаловажное, однако не решающее. В тех случаях, когда у читателя возникнут недоумения, они будут вызваны не литературными, а педагогическими и математическими пробелами изложения.

Соотношения между старым и новым в учебнике поясним несколькими примерами. На весь раздел, посвященный новой эре в истории математики — элементам Анализа, включая вводный § 106 (предел функции) и заключительные §§ 118—119 (максимум и минимум), отведено 23 страницы, а на идейно убогие преобразования иррациональных выражений — 32 страницы (§§ 26—37). Для сравнения заметим, что в учебнике алгебры коллектива авторов под ред. А. И. Маркушевича (1957 г.)¹⁾ на те же две темы приходится соответственно 60 стр. (§§ 149—178) и 11 стр. (§§ 35—40). В частности, «Приведению к рациональному виду числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений» уделено в учебнике А. Н. Барсукова свыше 4 страниц с 11 примерами (§ 37), а производным тригонометрических функций — $1\frac{1}{2}$ страницы и ни одного примера (§ 116), максимуму и минимуму функций (§ 118) — $2\frac{1}{2}$ страницы и 3 решенные задачи (§ 119, 2 страницы), где исследуемая функция — многочлен 2-й или 3-й степени. Алгоритм извлечения квадратного корня из числа (путем разбивки на грани) вместе с его «теорией» занимает 9 страниц (§§ 4—9), а «другие способы» (табличный, графический, приближенная формула, которыми как раз и будет пользоваться ученик, если ему когда-нибудь придется извлекать квадратный корень, — около 3 страниц (§ 10). В то же время «Пределы» (гл. VIII) занимают всего 10 страниц, а «Комплексные числа» (гл. XII) — 13 страниц (у «М» соответственно 15 и 22 страницы, а ведь размеры обеих книг разнятся не сильно).

¹⁾ В дальнейшем буду несколько раз ссылаться на этот учебник, обозначая его для краткости буквой «М». [Рецензия на него помещена ниже, стр. 286—292 настоящего выпуска. — *Ред.*]

Прежде чем перейти к деталям, хочу остановиться на одном принципиальном вопросе, в котором оба новых учебника сделали, на мой взгляд (хотя и не в одинаковом масштабе), шаг назад по сравнению с тем, что было до сих пор: отказались в школе от определения функции как соответствия между двумя множествами [взгляд, который А. И. Маркушевич поддерживал 10 лет назад¹⁾] и вернулись к «переменной величине» или просто «переменной»²⁾, изменяющейся в каком-то туманном «процессе». Конечно, задача учебника усложнилась в связи с появлением начал Анализа: нельзя было ограничиваться последовательностями (т. е. функциями натурального аргумента), которых было достаточно до сих пор для нужд средней школы; понадобился $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Однако для этого не было необходимости возвра-

щаться к концепции «переменной величины», как прекрасно показано, например, в «Восьми лекциях по математическому анализу» А. Я. Хинчина, где между прочим сказано:

«... в точном определении понятия предела, конечно, не может быть места таким терминам, как „явление“ или „процесс“, математический смысл которых совершенно неясен»³⁾.

Добавлю, что неясность усугубляется еще и появлением термина «величина», который, конечно, может быть математизирован, но, по-видимому, дорогой ценой⁴⁾. К тому же остающееся важным для школы понятие числовой последовательности лишь с натяжкой укладывается в прокрустово ложе непрерывно протекающего «процесса».

В учебнике А. Н. Барсукова этот рецидив неясности протекает особенно неприглядным образом, и глава VIII («Пределы») живо напоминает полувековой давности главу из «Геометрии» А. Киселева: как там говорится об отношении переменных без упоминания о том, что эти переменные участвуют в одном и том же «процессе» и что берутся значения переменных, принимаемые ими в один и тот же момент процесса, так и здесь (§ 76) формулируются теоремы о пределах, как если бы само собой было понятно, что такое сумма, произведение, ... переменных [в «М» указания на участие в общем «Процессе» включены в условия теоремы⁵⁾]. Этот пробел тем более опасен, что при отсутствии в § 76 доказательств он почти наверняка не будет восполнен учеником, а может быть и учителем.

¹⁾ См. журнал «Математика в школе» № 4 за 1947 г.

²⁾ Заметим: «переменная», а не «переменное», как чаще встречается в современной литературе; однако рядом с этим — «неизвестное», а не «неизвестная».

³⁾ Цитирую по 2-му изд., 1946, стр. 28. Эта мысль повторена в университетском «Кратком курсе математического анализа» того же автора, 1953, стр. 53.

⁴⁾ 10 аксиом у А. Н. Колмогорова в статье «величина» в БСЭ, 2-е изд. [О точке зрения Я. С. Дубнова на понятие величины см. стр. 212 настоящего выпуска. — *Ред.*]

⁵⁾ В «Алгебре», ч. II, А. К. Фаддеева и И. С. Соминского (Учпедгиз, 1958), хотя там речь идет только о последовательностях, специально определяются (на стр. 149 — 150) действия над ними.

Теперь я могу формулировать, что именно для меня неприемлемо в учебнике: он в лучшем случае обучает, но не воспитывает. А воспитывать нужно не только самостоятельность мышления, но и ту «математическую совесть», которая запрещает произносить пустые, лишённые точного смысла слова или выдавать за доказанное то, что только намечено. Между тем многие места книги не только не воспитывают, но подрывают дисциплину мышления.

Переходя к перечню цитат, иллюстрирующих недостатки книги и разбитые на группы по признаку однородности, я не претендую на полноту: список составлен рецензентом, а не редактором.

Поверхностное или неполное изложение

Стр. 6—7. Будет ли ученику внушено уважение к приближенным вычислениям, если правило возведения в квадрат (жирный шрифт на стр. 7) обосновывается одним случайным числовым примером и отсюда делается вывод: «Значит ... мы вправе ...». Какой смысл имеет в математике выражение «не совсем точная цифра»?¹⁾

Стр. 39. Приведя в историческом обзоре формулу $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$, автор не отмечает самого существенного предположения $b < a$.

Ученик, который пожелает применить эту формулу для $a = 1$, $b = 100$, получит $\sqrt{101} = 51$. Только на следующей странице 40, в конце параграфа, он узнает, что этот результат «не точен» (!).

Стр. 45. В доказательстве теоремы 4 ссылка на теорему 2, а надо — на теорему 1, но последняя не доказана²⁾.

Стр. 47. Без доказательства принимается, что квадрат бесконечной дроби, получающейся известным алгоритмом, применённым к 5,

¹⁾ В учебнике:

«Значит, возводя в квадрат приближенное число, мы вправе округлить результат до столько-х цифр, сколько их было в данном числе» (стр. 7).

«При возведении в квадрат приближенных чисел в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько их было в данном числе (последняя цифра может быть и не совсем точной)» (там же). (Ред.)

²⁾ Теорема 4 гласит: *если отрезок несоизмерим с единицей, то его длина выражается бесконечной периодической десятичной дробью*; ее доказательство опирается на теорему 1: *если длина отрезка выражается в виде конечной или бесконечной периодической дроби, то отрезок соизмерим с единицей длины* (а не на теорему 2, как сказано в учебнике; теорема 2 обратна теореме 1). Но теорема 1 опирается на недоказанное утверждение: *любую бесконечную периодическую дробь можно обратить в обыкновенную*. На стр. 43 говорится лишь, что это «доказывается в арифметике» (это неверно, см. ниже, стр. 283—284 настоящего выпуска) и что «способ обращения периодической дроби в обыкновенную будет изложен дальше, в § 88», на стр. 192—195. (Ред.)

равен 5^1). Однако непонятно, что же принимается без доказательства, так как неизвестно, что значит квадрат бесконечной дроби (об этом будет сказано только на стр. 52—53).

Стр. 135. Слабость концепции «переменной, изменяющейся на протяжении некоторого процесса», выступает с очевидностью в § 55²): два ученика покупают тетради — где же тут процесс? А между тем говорится о двух переменных и одной постоянной. В начале § 56 (стр. 196) по поводу этого же примера прямо говорится о «процессе покупки». Интересно знать, как расположены здесь значения каждой переменной?

Стр. 156. Нет никаких оснований утверждать, что уравнение 2-й степени может представлять пару прямых «лишь при некоторых частных значениях коэффициентов». Это можно было бы тогда сказать и про параболу³).

На стр. 157 лучше было не ссылаться на часть 1, § 80⁴), так как равносильность систем там не обоснована.

Стр. 262. Говорится о «предельном положении» секущей, но определение этого понятия отсутствует⁵). Странным образом, считают нужным тщательно определять предел «числового переменного», но к аналогичному случаю в геометрии подходят с другой мерой. Справедливость требует признать, что А. Н. Барсуков здесь не одинок.

¹) Алгоритм, о котором говорится в рецензии, — нахождение приближенного квадратного корня со всё большей и большей степенью точности. Далее в учебнике сказано:

«Можно доказать, что квадрат этого иррационального числа в точности равен пяти (доказательство не приводим, так как для этого недостаточно тех алгебраических сведений, которые были изложены в данном курсе)». (Ред.)

²) § 55 учебника «Понятие о функциональной зависимости» начинается с примера: «Несколько учеников покупают в магазине одинаковые тетради... Мы имеем здесь дело с тремя величинами: ценой тетради, числом купленных тетрадей и стоимостью всей покупки. Из этих трех величин первая... является постоянной, а две остальные переменными...». § 56 «Аргумент и функция» начинается так: «Вернемся снова к покупке тетрадей, о которой говорилось в § 55. Мы видели, что в этом процессе участвуют две переменные величины: число купленных тетрадей и их стоимость». (Ред.)

³) В учебнике: «В аналитической геометрии доказывается, что всякое уравнение второй степени с двумя неизвестными графически изображается одной из трех кривых — эллипсом (в частности, окружностью), параболой или гиперболой (лишь при некоторых частных значениях коэффициентов графиком уравнения будут две прямые». (Ред.)

⁴) В учебнике: «Системы уравнений
$$\begin{cases} y = 65 - x \\ x(65 - x) = 1000 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} xy = 1000 \\ x + y = 65 \end{cases}$$
 равносильны (ч. 1, § 80)». (Ред.)

⁵) В учебнике: «Определение. Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей, проходящей через точку M и другую точку кривой, когда эта вторая точка неограниченно приближается к M ». (Ред.)

Педагогические дефекты: усложненное изложение; привитие ученику дурного вкуса в образцах решения задач

Стр. 12. «... условились при извлечении квадратного корня брать только одно из его значений и именно положительное...» Но ведь скоро появится формула для решения квадратного уравнения!

Стр. 55—57. Доказательство теоремы 1¹⁾, справедливость которой «достаточно очевидна», растянуто на $1\frac{1}{2}$ страницы. Доказательство случая 2 — образец формализма²⁾. Случай 3 совершенно лишний, так как он только обозначением отличается от случая 1. То же в теореме 2, обратной к теореме 1.

Стр. 70. «Знак корня $\sqrt[n]{}$ называется также радикалом... Часто называют радикалом все выражение $a\sqrt[n]{b}$ ». Позже термин «радикал» в ответственных формулировках употребляется в смыслах, отличных от обоих названных (см., например, жирный шрифт на стр. 88, 89, где под радикалом понимается выражение $\sqrt[n]{a}$).

Стр. 71. « $\sqrt[2k+1]{a} = b$ » [при $a < 0$]. «Очевидно, b может быть только отрицательным числом... Значит, корень нечетной степени из отрицательного числа есть число отрицательное» (подчеркнуто всюду мной — *Ред.*). Итак, из «может быть» следует «есть» — так воспитывают математическое мышление.

Стр. 79. Отсутствие вкуса в примере I, где вместо 5-звенной цепи равенств³⁾ достаточно было написать $a^2 \sqrt{\frac{b}{a}} = a \sqrt{\frac{b}{a} a^2} = a \sqrt{ab}$.

Стр. 80. « $x^6 = 5^3$... Извлечем из обеих частей кубический корень. Получим ... $x^2 = 5$ ». Автор, считающий нужным доказывать, что из $a = b$ следует $a^n = b^n$ (n — натуральное число)⁴⁾, находит возможным, не ссылаясь на теорему 2 стр. 57, толкнуть ученика на ошибочный прием решения уравнений.

¹⁾ В учебнике: «Теорема 1. Для любых положительных чисел a и b справедливы следующие соотношения: 1) Если $a > b$, то $a^n > b^n$. 2) Если $a = b$, то $a^n = b^n$. 3) Если $a < b$, то $a^n < b^n$ ». (Ред.)

²⁾ Приводим его целиком: «Дано $a = b > 0$. Доказать, что $a^n = b^n$. Это положение очевидно. Если напишем n равенств $a = b$, $a = b$, $a = b$ и перемножим левые и правые части, то получим $a^n = b^n$ ». (Ред.)

³⁾ В учебнике: $a^2 \sqrt{\frac{b}{a}} = a^2 \sqrt{\frac{ab}{a^2}} = a^2 \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}} = \frac{a^2 \sqrt{ab}}{a} = a \sqrt{ab}$. (Ред.)

⁴⁾ Теорема 1 на стр. 55, приведенная в сноске 1) на этой странице. Теорема 2, о которой говорится дальше, — обратна теореме 1. (Ред.)

Стр. 81. В теореме 1¹⁾ — что такое показатель степени подкоренного выражения? где он, например, в случаях $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt{a^2\sqrt[3]{b}}$?

И почему это свойство корня «основное»?

Стр. 127. Задача, открывающая § 51, решается безвкусно (лучше было составить два уравнения с двумя неизвестными)²⁾. Делается это ради того, чтобы получить пример (первый) иррационального уравнения. Решение его неполноценно, так как (стр. 128) «мы пока не знаем, является ли уравнение (3) равносильным уравнению (1)». Это не мешает тому, чтобы несколькими строками ниже объявить решение окончательным.

Стр. 173. «Возьмем две параллельные прямые... и восстановим (?) к ним (?) перпендикуляр... Будем... передвигать этот перпендикуляр вдоль прямых...» — порча математического языка. Кроме того, какие преимущества имеет описанное здесь движение отрезка a перед любым другим его движением, если речь идет о постоянстве длины?³⁾.

На стр. 174 — ненужные и безответственные разговоры о бесконечно большом числе слагаемых. Непонятно, какие значения переменных надо складывать, если число слагаемых меняется. Автор спасается из этой трисины только благодаря случайному обстоятельству: стороны правильного многоугольника равны между собой⁴⁾.

¹⁾ В учебнике в § 29 формулируется следующая теорема, названная «основным свойством корня»:

Теорема 1. Значение корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же число. (Ред.)

²⁾ В учебнике:

Задача. Периметр прямоугольного треугольника равен 30 см, а гипотенуза равна 13 см. Найти катеты.

Решение. Пусть один из катетов равен x сантиметрам. По гипотенузе и катету, пользуясь теоремой Пифагора, можно определить другой катет. Он будет равен $\sqrt{13^2 - x^2}$. По условию $13 + x + \sqrt{13^2 - x^2} = 30$... (1).» [Далее корень уединяется, обе части уравнения возводятся в квадрат и оно приводится к виду: $169 - x^2 = 289 - 34x + x^2$. (3)] (Ред.)

³⁾ Приводим начало § 75, имеющего название «Предел постоянной величины»:

«Возьмем две параллельные прямые AB и CD (черт. 44) и восстановим к ним перпендикуляр MN [точка M на прямой AB , а N на CD — Ред.]. Обозначим длину этого перпендикуляра через a . Будем теперь передвигать этот перпендикуляр вдоль прямых AB и CD . Он будет занимать различные положения, но длина его все время останется равной a . Этот пример показывает, что мы можем и постоянную величину рассматривать как переменную, принимающую всё время одно и то же числовое значение». (Ред.)

⁴⁾ В учебнике:

«Если же число слагаемых становится бесконечно большим, то свойство 1 [«Предел суммы двух или нескольких переменных равен сумме пределов переменных» — Ред.] к такой сумме применить уже нельзя. Покажем это на примере. Возьмем окружность (черт. 46), вписав в нее правильный треугольник, затем шестиугольник, 12-угольник и т. д. При этом стороны многоугольника будут все время уменьшаться. Очевидно, что при неограниченном увеличении числа сторон каждая из них имеет пределом нуль. Тем не менее сумма этих сторон (то-есть периметр многоугольника) не только не стремится к нулю, но,

Отголосок этого архаизма — «конечное число» на странице 210¹⁾.

Стр. 259 и след. В основу понятия о «производной» положено (§ 109) представление о скорости процессов, «совершающихся в природе, в технике, в производстве, в быту». Но ведь там речь идет об изменении во времени, и только такая скорость непосредственно доступна интуиции. Между тем автор считает, что всякая функция $f(x)$ имеет скорость изменения безотносительно к природе x . Этим несколько не облегчается усвоение формального определения «производной», данного жирным шрифтом на стр. 260²⁾. Само определение педагогически небрежно, так как оставляет открытым вопрос о том, что же представляет собой «этот предел»: число? функцию? значение функций? если да, то какой? Одним словом, не делается различия между 1) производной функцией и 2) производной в данной точке. Позже это смешение понятий должно вызвать неясность в понимании геометрического смысла производной (жирный шрифт на стр. 263)³⁾.

Стр. 263 и след. При выводе правил дифференцирования автор усложняет себе (и ученику) задачу, отказываясь от 1) производной постоянного; 2) вынесения постоянного множителя за знак дифференцирования. В результате, например, вывод производной для ax^n (§ 114) выглядит совершенно неестественным⁴⁾.

Стр. 267. Автор не хочет расстаться с «линиями синуса и тангенса», однако не разъясняет этих терминов.

Фундаментальное указание о том, что α есть радианная мера угла, не внесено в формулировку теоремы о $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, а появляется только позже в скобках⁵⁾.

наоборот, все время увеличивается (предел этой суммы принимают за длину окружности». (Ред.)

¹⁾ «... теорема [о логарифме произведения] верна и для любого конечного числа сомножителей». (Ред.)

²⁾ «Определение. Производной функции $y=f(x)$ по x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента x , когда приращение аргумента стремится к нулю». (Ред.)

³⁾ «Производная функция $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с его абсциссой, равной x ». (Ред.)

⁴⁾ В учебнике:

$$\begin{aligned} \langle (ax^n)' = (ax \cdot x^{n-1})' = ax(x^{n-1})' + x^{n-1}(ax)' = \\ = (n-1)ax^{n-1} + ax^{n-1} = nax^{n-1} \rangle \text{ (стр. 266). (Ред.)} \end{aligned}$$

⁵⁾ В учебнике: «Докажем теорему:

Теорема. Предел отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при α , стремящемся к нулю, равен единице.

Надо доказать: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Возьмем окружность с радиусом $R=1$ (черт. 78).

Отложим на ней дугу $AB=\alpha$ (в радианах). Построим линии синуса и тангенса угла α ...». (Ред.)

Стр. 276. «Введение отрицательных и дробных чисел полностью разрешило вопрос о действиях вычитания и деления». На каком этапе эволюции числа был поставлен этот «вопрос»? Без разъяснения этого приведенная цитата лишена смысла. А теперь посмотрим, как описана дальнейшая эволюция: «Так как $\sqrt{9} = \pm 3$, то определим $\sqrt{-9}$ как произведение $\sqrt{9}$ и некоторого числа, которое обозначим через i ». Почему «произведение», а не скажем, сумма? Этот произвол должен разлагающим образом действовать на формирование интеллекта. Разве это лучше, чем изложение (тоже неприемлемое) у Киселева?

Стр. 296 и далее. В § 132 равносильность неравенств излагается с теми же недостатками, какие можно было отметить в ч. I учебника по поводу равносильности уравнений¹⁾: тривиальная теорема 1 прививает ученику дурной вкус²⁾; содержание теоремы 2 обидно требованием, чтобы прибавляемая функция была многочленом, в результате чего для переноса членов из одной части в другую («Следствие», стр. 298) появляется невыполняемое на практике ограничение³⁾. Ничего не сказано о влиянии тождественных преобразований, производимых в частях неравенства. Судя по «Примечанию» на стр. 298⁴⁾, автор считает, что теорему 2 (о прибавлении к обеим частям неравенства одного и того же многочлена) надо доказывать дважды: для $f(x) > \varphi(x)$ и для $f(x) < \varphi(x)$, между тем как разница только в обозначениях.

Стр. 308. Решение задачи 2 служит плохим образцом⁵⁾. Это — простейшая задача на решения неопределенного уравнения с двумя неизвестными в целых положительных числах. Для решения достаточно арифметических соображений, относящихся к делимости (обозначение m излишне).

О ш и б к и

Стр. 43. «... в арифметике доказывается, что всякая бесконечная десятичная дробь может быть представлена в виде обыкновенной

¹⁾ Ср. Я. С. Дубнов, К проблеме создания новых учебников по математике для средней школы, «Математическое просвещение», вып. 3, стр. 283. (Прим. ред.)

²⁾ «Теорема 1. Если одно неравенство равносильно второму, а это второе неравенство равносильно третьему, то и первое неравенство равносильно третьему». (Ред.)

³⁾ «Теорема 2. Если к обеим частям неравенства прибавим один и тот же многочлен относительно неизвестного, то получим неравенство, равносильное данному»... «Следствие. Каждый член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, переменяя его знак на противоположный». (Ред.)

⁴⁾ «Примечание [к доказательству теоремы 2]. Все приведенные рассуждения останутся совершенно теми же, если бы вместо неравенства $f(x) > \varphi(x)$ было бы взято неравенство $f(x) < \varphi(x)$. Поэтому мы можем считать, что теорема доказана для обоих неравенств». (Ред.)

⁵⁾ «Задача 2. Куплено m книг стоимостью в 8 руб. и в 3 руб. Сколько куплено тех и других книг в отдельности, если за всю покупку уплачено 42 руб.». [Далее в учебнике вместо простого уравнения $8x + 3y = 12$ составляется уравнение $8x + 3(m - x) = 42$, из которого выражается x через m и т. д. (Ред.)

дроби», — не доказывается и принципиально не может быть доказано. [Что такое бесконечная дробь? Обозначение? Предел?] Так же не обосновано обратное утверждение на стр. 44¹⁾.

Стр. 52. Определение умножения действительных чисел: «... приближенное значение произведения», но ведь «произведение» еще не определено; примитивный логический круг.

Стр. 145. Расстояние точки от оси абсцисс отождествляется с ординатой. В результате получаем b вместо $|b|^2$.

Стр. 176. В п. 4 $\left(\lim \frac{x}{y}\right)$ не сделана оговорка о том, что у «в процессе изменения» не должен принимать значение 0 (у «М» эта оговорка сделана).

Стр. 200. Утверждение, что в формуле сложных процентов число лет может быть не только целым, ничем не обосновано, да оно и ошибочно, так как из уравнения $f(x+1)=f(x)\left(1+\frac{p}{100}\right)$ нельзя сделать вывод, что $f(x)$ — показательная функция. Во всяком случае мотивировать это утверждение тем, что «можно говорить о приросте населения за 5 лет...», значит культивировать безответственность мысли и речи³⁾.

Стр. 233. В «задаче»⁴⁾ t — натуральное число. Приписывание t ных значений незаконно. Автор повторяет свою ошибку, сделанную на стр. 200.

Стр. 268—269. При выводе производной от $f(x)=\sin mx$ принимается без доказательства (и без упоминания об этом логическом пробеле), что $\cos m\left(x+\frac{h}{2}\right)\rightarrow\cos mx$ при $h\rightarrow 0$. Аналогичный пробел и в выводе производной от $f(x)=\cos mx$.

¹⁾ О теореме 2 см. стр. 278. (Ред.)

²⁾ В учебнике: «... графиком функции $y=b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на расстояние, равное b ». (Ред.)

³⁾ В учебнике ставится задача: «Население города в настоящий момент составляет a человек. Вычислено, что ежегодно население увеличивается в среднем на $p\%$. Чему будет равно население города через x лет?» По-

лагая $x=1, 2, 3$, автор получает соответственно $A_1=a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, $A_2=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, $A_3=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ и делает вывод: «Отсюда заключаем, что через x лет население города составит $A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^x$ (2). Формула (2)

называется формулой сложных процентов. В приведенной выше задаче x может принимать не только целые, но и любые действительные значения (можно говорить о приросте населения за $5\frac{1}{2}$ лет, за 7,3 года и т. п.). (Ред.)

⁴⁾ Задача с тем же содержанием, что и предыдущая, но задается A и требуется найти показатель степени (он обозначен здесь через t). (Ред.)

Погрешности языка литературного или математического

Стр. 63. «... если ... обозначим, то было бы...¹⁾).

Стр. 69. Определение 3 построено по такому примерно образцу: «Соседями данного лица называются два лица, из которых дом одного находится ...»²⁾).

Стр. 132. «Первый множитель — данное уравнение»³⁾).

Стр. 143. «... функции..., имеющей ... абсциссу...»⁴⁾).

Стр. 145. «... функция ... примет вид $y = b$ »⁵⁾).

Стр. 243. «Функция $\log_a x$ при $x = 1$ равна нулю».

Стр. 243—244. «Ее отличительная особенность от всех предыдущих функций...»⁶⁾).

Стр. 244. «... функции, в которых функциональная зависимость выражалась различно...»⁷⁾).

Стр. 253. «В этом случае y становится бесконечно большой величиной».

Стр. 254. «... свойства о пределах»⁸⁾).

Стр. 303, задача 2. «Так как уравнение [речь идет об уравнении $x - \frac{2(mx-3)}{m^2} = \frac{5}{m} - \frac{4}{m^2}$. Рец.] имеет буквенный коэффициент (?) или, как говорят, параметр ...]. После этого на вопрос, что такое параметр, ученик, по-видимому, должен отвечать: «параметр — это буквенный коэффициент».

¹⁾ «Отсюда видим, что если мы условно обозначим дробь $\frac{1}{3^3}$ через 3^{-1} , то можно было бы и к этому случаю применить формулу (1)». (Ред.)

²⁾ «Приближенными корнями n -й степени из данного числа с точностью до единицы называются два последовательных натуральных числа, из которых n -я степень одного меньше, а n -я степень другого больше данного числа». (Ред.)

³⁾ «Возьмем пример $\sqrt{5-x} = x+1$. Возведем обе части в квадрат: $(\sqrt{5-x})^2 = (x+1)^2$. Отсюда $(\sqrt{5-x})^2 - (x+1)^2 = 0$; $(\sqrt{5-x} - x - 1) \times (\sqrt{5-x} + x + 1) = 0$. Первый множитель — данное уравнение». (Ред.)

⁴⁾ «... Ордината любой точки графика функции $y = kx + b$ равна значению b , сложенному с ординатой точки графика функции $y = kx$, имеющей ту же абсциссу». (Ред.)

⁵⁾ «Пусть $k = 0$, $b \neq a$. Тогда функция $y = kx + b$ примет вид $y = b$ ». (Ред.)

⁶⁾ «Эта функция $\left[y = \frac{a}{x} \right]$ была рассмотрена в § 23 для $a = 1$. Ее отличительная особенность от всех предыдущих функций заключается в том, что ее график, называемый гиперболой, состоит из двух не связанных между собой ветвей». (Ред.)

⁷⁾ «В предыдущем параграфе были рассмотрены функции, в которых функциональная зависимость выражалась различно, например $y = kx$, $y = a^x$ ». (Ред.)

⁸⁾ «Если две или несколько функций имеют пределы при $x \rightarrow a$, то к ним, как к переменным величинам, применимы все свойства о пределах, изложенные в § 76». (Ред.)

После сказанного понятно, что я считал бы тяжелой ошибкой принятие учебника А. Н. Барсукова в качестве стабильного. Между тем, такая опасность существует благодаря отмеченной выше привлекательности книги по первому впечатлению и духовному родству ее с привычным для школы учебником А. Киселева. Борьба с положительной оценкой книги должна вестись средствами общественности: в печати, на конференциях, при обсуждении в научно-педагогических коллективах, но только не средствами механического воздействия; если требуется дополнительный тираж для того, чтобы познакомить с книгой более широкий круг читателей или организовать по ней экспериментальную работу, то такой тираж, по моему мнению, должен быть выпущен.

Москва, 28.XI.57.

2) В. М. Бладис, Н. С. Истомина, А. И. Маркушевич, К. П. Сикорский, Алгебра, ч. II. Учебник для VIII—X классов средней школы, под редакцией А. И. Маркушевича, Учпедгиз, М., 1957, 339 стр., тираж 10 000 экз.

Книги, написанные коллективами авторов, часто страдают качественной неоднородностью уровня изложения. Не всегда редактору удается сгладить это различие стилей, не совсем удалось это и в данном случае. В главе I («Степени и корни»), VII («Показательная и логарифмическая функции»), VIII («Логарифмы») преувеличенное внимание уделено числовым расчетам, в частности приближенным вычислениям (стр. 7—8, 17—18, 29—32, 38, 42—43, 52—53, 157—158, 161—162, 176—177, 180, 186—188). Правда, значительная часть отмеченных текстов напечатана мелким шрифтом, т. е., согласно Предисловию, они «предназначаются для учащихся, особо интересующихся математикой, и... для внеклассной работы». Но наблюдения показывают, что как раз «особо интересующиеся математикой» не имеют никакого влечения к приближенным вычислениям с их «правилами», сообщаемыми догматически или опирающимися на примеры, а идейное содержание этой работы настолько бедно, что вряд ли стоит включать ее в программу школьного кружка, имеющего задачей повышение математического развития своих участников. Нет также оснований к тому, чтобы изображать вычислительную технику как элемент политехнизации: эта техника понадобится очень немногим, и разумно давать ее тем и тогда, кому и когда она действительно становится необходимой (например, на физическом факультете МГУ вычислительная техника входит в программу физического практикума). В учебнике, кроме упомянутых глав и главы IX («Счетная логарифмическая линейка»), вычисления не играют заметной роли (исключение — § 172 «Приближенное вычисление $\sin x$ и $\cos x$ », напечатанный мелким шрифтом).

Главы II («Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к квадратным»), V («Пределы»), X («Функции и их исследование. Производ-

ная»), XII («Комплексные числа») вызывают иногда возражения педагогического характера, из которых наиболее крупное относится к концепции «переменной величины», взятой в качестве исходного пункта для введения в Анализ. По этому поводу не буду повторять свою аргументацию, изложенную в рецензии на книгу «Алгебра, ч. II» А. Н. Барсукова¹⁾. Однако, предъявляя к обоим учебникам общую претензию, я не считаю изложение в них упомянутой темы равноценным: в рассматриваемом сейчас учебнике оно стоит на значительно более высоком уровне (конкретные замечания будут сделаны ниже). В частности, главу X, новую по содержанию для нашей школы, следует признать в высшей степени удачной; как одно из достижений отмечу отсутствие явных и скрытых ссылок на непрерывность функций при выводе формул их дифференцирования (впрочем, о непрерывности упомянуто мелким шрифтом на стр. 247). Изложение направлено не на технику дифференцирования, а на углубление понятий, как и должно быть в интересах общего развития, а ученик с математическими склонностями найдет много поучительного в мелком шрифте этой главы (полная индукция, формула бинома и др.).

В остальных главах больше ощущается влияние школьных традиций и чаще возникают поводы для (указанных ниже) возражений педагогического характера.

Язык учебника иногда тяжеловат из-за стремления к теоретической выдержанности, но в литературном отношении почти безупречен (отдельные нарушения — ниже).

Перейдем теперь к перечню отдельных недостатков книги.

Возражения теоретического характера

Стр. 20—21. «... Было установлено в курсе арифметики», что «например, $\frac{5}{11} = 0,454545... = 0,(45)$ » — что означает здесь знак $=$?

Рассуждение, относящееся к $0,(12)$, грубо ошибочно²⁾, так как правило умножения десятичной дроби на 100 путем переноса запятой обосновано только для конечных дробей. Даже неизвестно, что значит «умножить бесконечную дробь на 100».

Стр. 23. Из двух рядом стоящих фраз первая содержит предположение, что $\frac{a}{b}$ — ... дробь, отличная от точного рационального

¹⁾ Стр. 277 настоящего выпуска. (Ред.)

²⁾ В учебнике: «Всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является десятичным разложением некоторого рационального числа. Не приводя доказательства в общем виде (такое доказательство будет дано в § 103), убедимся в истинности этого утверждения на примере. Пусть $x = 0,121212... = 0,(12)$. После умножения на 100 имеем: $100x = 12,1212... = 12 + 0,(12) = 12 + x$, откуда $9x = 12$, $x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Проверка делением показывает, что дробь $\frac{4}{3}$ действительно имеет десятичное разложение $0,(12)$ ». (Ред.)

квадрата», во второй говорится о необходимости «предварительно... доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого был равен $\frac{a}{b}$ ». Дальнейшее изложение построено на смешении двух утверждений такого типа: 1) извлекая из 0,416 квадратный корень с помощью того же алгоритма, какой применялся для нахождения десятичных приближений корня из рационального квадрата, получим бесконечную десятичную дробь; 2) эта дробь равна $\sqrt{0,416^1}$.

С тем же основанием можно было утверждать, что для любого a будет верно $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$. Можно было бы сумму членов каждой данной числовой последовательности объявить «новым числом» и т. д.²⁾

Стр. 24. «Эти два обстоятельства дают нам право утверждать»³⁾ — никакие «обстоятельства» не дают права утверждать бессмыслицу. То же в строках 19—17 снизу.

Стр. 25. Здесь говорится о десятичных *приближениях* к иррациональному *числу*, а сравнение действительных чисел отнесено к следующему параграфу.

¹⁾ В учебнике:

«Назовем несократимую дробь, числитель и знаменатель которой — точные квадраты, *точным рациональным квадратом*. Можно доказать также такую теорему: Десятичное разложение для $\sqrt{\frac{a}{b}}$, где $\frac{a}{b}$ — несократимая дробь, отличная от точного рационального квадрата представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь. Предварительно нужно будет доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого был бы равен $\frac{a}{b}$.

Итак, десятичное разложение квадратного корня из рационального положительного числа может быть трех видов: 1) конечной десятичной дробью или натуральным числом...; 2) бесконечной периодической десятичной дробью...; 3) бесконечной непериодической десятичной дробью, как, например,... $\sqrt{0,416} = 0,6449806...$ В случаях 1) и 2) существует рациональное число, равное корню, в случае 3) такого рационального числа не существует». (Ред.)

²⁾ См. также следующую сноску. (Ред.)

³⁾ В учебнике: «Можно написать сколько угодно десятичных дробей, выражающих, например, что число $a = 7:22$ со всё более и более высокой степенью точности с недостатком и с избытком: $0,3 < a < 0,4$; $0,31 < a < 0,32$; $0,318 < a < 0,319$; $0,3181 < a < 0,3182$ и т. д. Однако мы не сумеем найти конечной десятичной дроби, в точности равной числу $7:22$. Эти два обстоятельства дают нам право утверждать, что рациональное число $7:22$ равно бесконечной десятичной дроби $0,3181818... = 0,3(18)$, которая является *периодической*».

Далее аналогичное рассуждение проводится при извлечении квадратного корня из числа 0,416 и (в строках 19—17 снизу) сказано: «Эти два обстоятельства дают основание утверждать, что бесконечная периодическая десятичная дробь 0,6449806..., представляющая собой десятичное разложение для $\sqrt{0,416}$, равна этому корню. Это число особой природы, уже не рациональное; такого рода числа получили название *иррациональных*. (Ред.)

Стр. 87. Постоянная величина охарактеризована здесь (жирный шрифт) как такая, которая «сохраняет свое числовое значение при любых условиях»¹⁾. А если изменение «условий» состоит в переходе от геометрии Эвклида к геометрии Лобачевского?

Стр. 88—89. Основное определение: «*Такие величины, которые принимают различные числовые значения в течение данного процесса, называются переменными*». И здесь — «процесс» (протекающий во времени?). Какие процессы протекают в примерах 1), 2), 5) § 63?²⁾

Стр. 89. А в случае функции нескольких переменных (конец § 63) тоже «процесс»? Каков порядок следования различных моментов этого процесса?³⁾

Стр. 189. В задаче⁴⁾ число лет x — натуральное; приписывание x иных значений незаконно. Автор опирается на ошибочную предпосылку, и его «преимущество» перед учебником А. Н. Барсукова⁵⁾ состоит только в том, что он не формулирует ее явно.

Стр. 226, жирный шрифт. Касательная — «Предельное положение секущей» (2) Цель — придать точный смысл «направлению».

В строках, предшествующих определению касательной, чисто геометрическая идея касательной затемняется тем, что без надобности вводятся координаты⁶⁾. Источник в том, что из «предельного положе-

¹⁾ В учебнике (начало главы III): «При изучении различных величин мы нередко встречаемся с величинами, которые сохраняют свое числовое значение при любых условиях. Так, например, из геометрии известно, что каков бы треугольник ни был, сумма внутренних его углов равна 180° ... *Те величины, которые сохраняют свое числовое значение при любых условиях, называются постоянными*. (Ред.)

²⁾ Примеры (на стр. 88—89): 1) стоимость телеграммы, зависящая от числа слов; 2) сумма внутренних углов многоугольника, зависящая от числа его сторон...; 5) кадет прямоугольного треугольника с гипотенузой длины 1, зависящий от второго катета.

³⁾ В учебнике: «Во многих вопросах приходится встречаться с функциями двух или большего числа переменных. Так, например, длина гипотенузы произвольного прямоугольного треугольника есть функция двух независимых переменных a и b (длин катетов)». (Ред.)

⁴⁾ Текст задачи: «Через сколько лет производительность предприятия увеличится в 10 раз, если ежегодный прирост его производительности составляет $12\frac{1}{2}\%$?» Решение задачи сводится к показательному уравнению $1,12^x = 10$. (Ред.)

⁵⁾ Ср. стр. 284 настоящего выпуска. (Ред.)

⁶⁾ Начало § 150 «Понятие касательной к кривой»:

«Рассматривая какую-нибудь кривую..., видим, что кривая меняет свое направление от точки к точке. Чтобы придать точный смысл понятию направления кривой в какой-либо ее точке $M(x, y)$ проведем сначала различные секущие, проходящие через эту точку и через какую-нибудь другую точку $N(x_1, y_1)$ той же кривой. Чем ближе x_1 к x , тем ближе N к M и тем теснее прилегает секущая к кривой вблизи точки M . Если x_1 стремится к пределу x , то N , передвигаясь по кривой, стремится к совпадению с M , а секущая MN , поворачиваясь около точки M , стремится к некоторому предельному положению MT . Последнее и характеризует направление кривой в точке M ».

ния» нельзя сделать никаких выводов, и автор заранее подготавливает отступление на укрепленные позиции предельного перехода в области чисел.

В примере 1) [касательная к окружности] неявно используется хорошее геометрическое определение касательной, а в примере 2) [касательная к параболы] уже становятся необходимыми координаты.

Стр. 284—285. Развита здесь теория равносильности уравнений неполна — в ней отсутствует вопрос о законности тождественных преобразований. Например, на основании теоремы 1, стр. 284¹⁾, уравнения (не имеющие корней) $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ и $x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ равносильны, но они не равносильны уравнению $x = 0$, а между тем именно ради последнего уравнения был предпринят переход от первого уравнения ко второму.

Возражения педагогического и терминологического характера

Стр. 37. Где произведение $a^{-n} \cdot a^x$?²⁾ О необходимости рассмотреть подобные случаи даже не упомянуто.

Стр. 51. Употребление слова «радикал» на этой странице не согласовано со стр. 38³⁾.

Стр. 99. В главе III, § 66 был определен только «график функции», но ничего не было сказано о «графике уравнения». Между тем, начиная со стр. 99, автор свободно пользуется последним термином, как будто это нечто само собой разумеющееся. На стр. 120 даже строится график уравнения $x^2 + y^2 = 13$, причем это делается мимоходом и неполноценно (рассматривается положение точки M только в 1-й четверти).

Стр. 111. Замечание (мелкий шрифт): «При решении квадратного уравнения по формуле для корней его предварительно преобразуют так, чтобы коэффициент при x^2 был положительным. При графическом решении это преобразование не обязательно». Думаю, что

¹⁾ «Теорема 1. Если к обеим частям уравнения $F(x) = f(x)$ прибавить по одной и той же функции $\varphi(x)$, определенной для тех же значений x , для которых определены одновременно $F(x)$ и $f(x)$, то получим уравнение $F(x) + \varphi(x) = f(x) + \varphi(x)$, равносильное данному». (Ред.)

²⁾ В учебнике при обосновании применения правил действия над степенями с отрицательными показателями рассмотрены только случаи $a^{-n} \cdot a^{-x}$, $a^{-n} : a^{-x}$, $(a^{-n})^{-x}$ и другие, но ни одного случая, когда один показатель отрицательный, а другой положительный. (Ред.)

³⁾ На стр. 38 учебника: «Заметим, что слово „радикал“... употребляют как для обозначения одного только знака $\sqrt[n]{}$, так и для обозначения всего выражения $\sqrt[n]{a}$. На стр. 51: «Радикалы называются *подобными*, если они... отличаются друг от друга только коэффициентами (или ничем не отличаются). Так, радикалы $5\sqrt{ab}$, $-3\sqrt{ab}$, $c\sqrt{ab}$ подобны». (Ред.)

оно никогда не обязательно, и в главе II (квадратные уравнения) я такого требования не нашел. Только по поводу биквадратного уравнения (стр. 80) почему-то добавлено требование $a > 0$, которое нигде позже не используется.

Стр. 124. Глава V («Пределы») начинается с § 88 «Процессы изменения переменных. Понятие последовательности». В следующей главе VI, где все время речь идет о последовательности, понятие «переменной», «процесса» действительно не применяется за ненадобностью¹⁾.

Стр. 126, начало § 89: «Значения переменной величины неограниченно приближаются к определенному постоянному числу» (то же на стр. 129), т. е. величина \equiv число? Но тогда зачем величина?²⁾

На стр. 127 из низкопоклонства перед «величиной» вместо «градусная мера угла» всюду «величина угла (измеренная в градусах)» и $180(x_n - 2)$ вместо $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Стр. 129. Данное жирным шрифтом определение предела³⁾ можно понять только так: наступит такой торжественный момент, начиная с которого $|A - x|$ станет и останется меньше любого наперед заданного числа.

Стр. 232. Рядом «переменная» и «переменного»⁴⁾.

Стр. 316. Слабым местом в развитой здесь теории комплексных чисел остается то обстоятельство, что действия над комплексным числом удастся ввести как обобщение соответствующих действий над действительными числами только потому, что эти последние действия так, а не иначе препарированы. Например, в случае двух вещественных сомножителей можно было бы брать вместо суммы аргументов их разность, а отсюда умножение комплексных чисел уже не получилось бы. Другим слабым местом является сама собой напрашивающаяся мысль о возможности переноса теории в трехмерное пространство (на самом деле это не так).

Язык

Стр. 87. «Длина перпендикуляра, опущенного из центра круга на стороны многоугольников».

¹⁾ О процессе изменения переменных см. на стр. 277 настоящего выпуска. (Прим. ред.)

²⁾ О точке зрения Я. С. Дубнова на понятие «величина» см. стр. 212—214 настоящего выпуска. (Прим. ред.)

³⁾ В учебнике: «Число A называется пределом переменной величины x , если абсолютная величина разности $A - x$ становится и остается меньше любого наперед заданного положительного числа, начиная с определенного состояния процесса и для всех последующих его состояний». (Ред.)

⁴⁾ В учебнике: «... переменная s (расстояние) будет функцией переменного t (времени)». (Ред.)

Стр. 283. «Если, например, $F(a) = f(a)$ при $x = a \dots$ » — странное выражение.

Как видим, учебник коллектива авторов не безупречен, но органическими недостатками не страдает и имеет серьезные шансы стать стабильным (из существующих учебников может конкурировать с ним только «Алгебра», ч. II, Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского после переработки этой книги и согласования с новой программой). Во всяком случае желательно провести по учебнику широкую экспериментальную работу, для которой нынешний тираж, конечно, окажется недостаточным.

КУРС ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ Я. С. ДУБНОВА

Первая часть сочинения

Н. В. Ефимов

(Москва)

Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления. Часть I. Векторная алгебра. Элементы векторного анализа. Издание четвертое, переработанное. Гостехиздат, М.—Л., 1950, 368 стр.

В научном творчестве Якова Семеновича Дубнова большое место занимает аппарат векторного и тензорного исчисления как самостоятельный предмет исследования. Многие работы Я. С. Дубнова специально направлены на усовершенствование векторных и тензорных методов, особенно в бинарной области. Наряду с этим его внимание неизменно привлекали вопросы изложения векторного исчисления.

В своих лекционных курсах Я. С. Дубнов предлагал множество различных вариантов доказательства интегральных формул, стремясь к предельной геометричности, тщательно выбирал обозначения с тем, чтобы дать простую и надежную в употреблении запись основных векторных операций с минимальным набором символов [в частности, без символа «набла» (∇)].

Двухтомный курс «Основы векторного исчисления», который Я. С. Дубнов писал и перерабатывал на протяжении многих лет, представляет собой органическую часть всей его научной, методической и учебной работы; этот курс возник вследствие настоятельной внутренней потребности автора реализовать свои глубоко продуманные взгляды на данный предмет и свою систему его изложения.

Естественно, что научная индивидуальность автора наиболее проявлена во второй части книги; однако отпечаток ее лежит и на первой части.

Первая часть сочинения «Основы векторного исчисления» состоит из введения и пяти глав; для каждой главы дано большое число задач, в конце книги приведены ответы и решения, приложены список употребляемых в литературе векторных обозначений и предметный

указатель. Отметим, что задачи, ответы на них и решения составляют около четверти всего объема книги (общее число задач равно 622).

Во введении на простых примерах поясняются роль векторного метода и его основные особенности по сравнению с методом координат; далее даны краткие исторические сведения и отмечено участие отечественных математиков в разработке векторного исчисления. Введение заканчивается сопоставлением элементарно-геометрических, координатных и векторных доказательств некоторых теорем школьного курса геометрии.

Дальнейший материал состоит из векторной алгебры (главы I—III) и векторного дифференциального исчисления (глава IV) с элементами теории кривых (глава V).

Векторная алгебра изложена в первых трех главах; первая глава посвящена *аффинным соотношениям между векторами*, вторая — *скалярному умножению*, третья — *векторному умножению* векторов. Изложение ведется с расчетом на читателя, который впервые изучает векторную алгебру: все основные предложения подробно разъяснены и доказаны, установлен полный контакт с аналитической геометрией, даны необходимые выходы в механику.

Для читателя, желающего более глубоко вникнуть в предмет, прежде всего предоставлен весьма богатый набор задач. Собранные задачи полностью обеспечивают развитие навыка в самой векторной алгебре и в ее приложениях к аналитической геометрии; следует отметить множество интересных фактов элементарной геометрии, предложенных для доказательства средствами векторной алгебры. Так, например, в ряде задач к главе I последовательно выясняются разнообразные аффинные свойства *центроида* системы точек (т. е. центра тяжести равных масс, помещенных в этих точках), а также совместные свойства центроидов нескольких систем (задачи 69—75); далее, после главы III (в задачах 394—396 и 403) сообщаются нетривиальные метрические свойства центроидов. В задачах 76—91 приведены разнообразные соотношения между отрезками, входящими в состав некоторых плоских и пространственных фигур, сходные с соотношениями Менелая и Чебы. Весьма полезны задачи, рассчитанные на приложения скалярного произведения, например суммирование $1 + \cos \alpha + \dots + \cos n\alpha$ (задача 139). Несколько задач (307—311) относятся к статике твердого тела (основные понятия и основная теорема статики изложены в специальном пункте в главе о векторном умножении).

Кроме задач, мелким шрифтом дается большой дополнительный материал теоретического характера: основные формулы сферической тригонометрии, метрическая косоугольная система координат и, вместе с тем, различие ковариантных и контравариантных координат векторов, косое (псевдоскалярное) умножение и, наконец, *единственность векторных операций*.

На последнем вопросе мы остановимся более подробно.

В обычном изложении векторной алгебры основные операции над векторами определяются конструктивно, а свойства операций доказываются, исходя из данных определений. Невозможность других определений при сохранении тех же свойств (или некоторых, заранее указанных свойств) в учебной литературе не устанавливается.

В книге Я. С. Дубнова этот вопрос изложен, причем очень остро и точно. Единственность определения суммы векторов установлена в конце первой главы (пункт 20, стр. 67) в виде следующей теоремы: *пусть с каждой парой векторов a, b сопоставлен некоторый вектор, обозначаемый символом $a \circ b$ так, что соблюдены следующие требования ¹⁾:*

- 1) $A(a \circ b) = Aa \circ Ab$;
- 2) $a \circ b = b \circ a$;
- 3) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
- 4) $a \circ 0 = a$.

В таком случае

$$a \circ b = a + b.$$

Там же доказана аналогичная теорема для умножения вектора на число: *пусть с каждой парой, состоящей из вектора a и числа λ сопоставлен некоторый вектор $\lambda \circ a$ так, что соблюдены следующие требования:*

- 1) $A(\lambda \circ a) = \lambda \circ Aa$;
- 2) $(\lambda + \mu) \circ a = \lambda \circ a + \mu \circ a$;
- 3) $(\lambda \mu) \circ a = \lambda \circ (\mu \circ a)^2$.

В таком случае

$$\lambda \circ a = \lambda a.$$

В главе II (стр. 106) решается вопрос о единственности скалярного умножения в пространстве; именно, доказывается теорема: *пусть с каждой парой векторов a, b , заданных в определенном порядке, сопоставлено число $a \circ b$, причем:*

- 1) $\lambda(a \circ b) = (\lambda a) \circ b = a \circ (\lambda b)$;
- 1₂) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$;
- 2) $Ia \circ Ib = a \circ b^3$.

В таком случае (при надлежащем выборе масштаба) либо $a \circ b = ab \cos \alpha$, либо $a \circ b = -ab \cos \alpha^3$.

Интересно, что условие $a \circ b = b \circ a$ не требуется. Если рассматриваются только векторы, лежащие в определенной плоскости (которую следует предположить ориентированной), то $a \circ b = \lambda ab + \mu a \times b$, где ab — скалярное, $a \times b$ — псевдоскалярное произведение, λ и μ — постоянные. Следовательно, чтобы получить аксиоматическое определение скалярного произведения на плоскости, нужно добавить условие $a \circ b = b \circ a$.

Наконец, в главе III установлена единственность векторного произведения, в предположении, что имеют место сочетательное и распределительное свойства и инвариантность относительно движений.

Тем самым вопрос аксиоматического обоснования векторной алгебры изложен исчерпывающим образом.

¹⁾ Символом A мы обозначаем некоторое аффинное преобразование.

²⁾ В сноске на стр. 71 по существу добавлено еще четвертое условие, исключющее возможность $\lambda \circ a = 0$ для любых λ и a .

³⁾ Символом I мы обозначаем некоторое движение пространства.

⁴⁾ Здесь α — угол между векторами a и b .

Закljučая обзор первых трех глав книги, подчеркнем, что автор построил материал векторной алгебры в двух планах. Первый план, представленный крупным шрифтом, содержит основные положения предмета в последовательном, подробном и ясном изложении, доступном широкому кругу читателей. Второй план, представленный мелким шрифтом, включает более сложные вопросы, излагаемые не так подробно, иногда в виде совсем кратких замечаний, и в некоторой части рассчитан на подготовленного читателя. Благодаря наличию этого второго плана и ввиду многочисленных связей с элементарной геометрией рассмотренные главы могут быть очень полезны для преподавателей средней школы.

Глава IV посвящена *векторным функциям скалярного переменного и скалярному полю*.

В первой половине этой главы изложены дифференцирование и интегрирование векторных функций с надлежащими геометрическими истолкованиями и приложениями в механике. Особого внимания здесь заслуживает серия примеров интегрирования векторных дифференциальных уравнений (стр. 211—218).

Во второй половине главы рассматриваются скалярное поле, линии и поверхности уровня, особые точки поля, производная по направлению и градиент. Все эти вопросы изложены с большим вниманием к геометрической стороне дела; в частности, в ряде примеров на стр. 231, 232 даны выражения градиентов некоторых полей в чисто векторной символике, без употребления координат. Наряду с этим получена координатная запись всех необходимых формул, а на стр. 235 предложены задачи вычислительного характера (требующие нахождения координат градиента, производных по направлению и особых точек поля). В конце главы помещены задачи, рассчитанные на применение общих правил дифференцирования векторных функций, применение теоремы Ролля и правила Лопиталя; кроме того, здесь имеется несколько задач на интегрирование векторных дифференциальных уравнений и более 20 разнообразных задач по теории скалярного поля.

Последняя, V глава книги посвящена *дифференциальным свойствам кривых*; вместе с тем эта глава представляет собой область плодотворных применений векторных методов, развитых в предыдущих главах.

В начале главы рассматриваются плоские кривые. После общих сведений о касательной, нормали и дифференциале дуги (не считая мелкого шрифта) излагается задача об огибающей семейства плоских кривых. Автор подходит к этому вопросу, исходя из рассмотрения изогональных траекторий семейства; огибающая выделяется как особый случай изогональной траектории, когда угол между траекторией и кривыми семейства равен нулю, а соответствующее дифференциаль-

ное уравнение превращается в конечное. В основном тексте, однако, уравнение огибающей выведено непосредственно из ее определения, но далее в кратком замечании (мелким шрифтом на стр. 256) показано, что с помощью косоого произведения можно сразу написать дифференциальное уравнение изогональных траекторий, причем в очень простом виде, который с очевидностью включает случай уравнения огибающей.

После теории огибающих излагаются: понятие кривизны, формулы Френе для плоской кривой, эволюты и эвольвенты; здесь же доказывается (для аналитических кривых), что кривизна как функция дуги определяет кривую с точностью до положения на плоскости; мелким шрифтом та же теорема доказана без предположения аналитичности. В нескольких замечаниях мелким шрифтом даны компактные формулы для кривизны и радиуса кривизны, записанные с помощью косоого произведения. Отметим еще, что косоое произведение позволяет автору получить удобные характеристики векторов, приложенных к данной точке кривой и направленных в сторону выпуклости или вогнутости (стр. 251).

Вторая половина последней главы содержит изложение теории пространственных кривых (кривизна, кручение, формулы Френе). Пятая глава, как и предыдущие, завершается разнообразными задачами, многие из которых дополняют основной текст интересными конкретными свойствами специальных кривых.

Книга Я. С. Дубнова может быть использована в качестве учебного пособия в университетах, педагогических институтах и вузах с высоким уровнем математического преподавания.

Известно, что овладение навыками векторного исчисления дается студентам не очень легко. Дело в том, что векторное исчисление, в частности векторная алгебра, представляет собой специальный алгоритм, требующий серьезной тренировки. Поэтому здесь, больше чем в каких-нибудь других разделах, обязательное преподавание нуждается в дополнительной помощи. Именно эту помощь и может оказать мастерски написанная книга Я. С. Дубнова.

Особое значение книга Я. С. Дубнова имеет для преподавателей как один из главных источников при обработке соответствующих разделов лекционных курсов и практических занятий.

Высокий уровень изложения, глубокая продуманность общего плана вместе с исключительным вниманием автора к деталям, широкий диапазон читателей, на которых рассчитана I часть курса,— все эти качества позволяют отнести книгу Я. С. Дубнова к числу лучших произведений нашей учебной математической литературы.

Вторая часть сочинения

П. К. Рашевский

(Москва)

Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления. Часть II. Линейные функции вектора. Векторный анализ (теория полей). Начало тензорного исчисления. Гостехиздат, М. — Л., 1952, 415 стр.

Среди нашей довольно богатой литературы по векторному анализу вторая часть «Основ векторного исчисления» Якова Семеновича Дубнова занимает особое место. Ее отличает та глубина, с которой автор раскрывает идейное содержание изучаемого материала и устанавливает его связи со смежными областями математики и ее приложениями.

Автор никогда не идет по линии наименьшего сопротивления и не сводит дело к ограниченному списку довольно элементарных понятий и формул, хотя внешне материал векторного анализа этому, как известно, поддается; напротив, в каждом случае Я. С. Дубнов отыскивает то иногда мало заметное зерно, которое в более высоких областях математики дает ростки и развивается в существенный элемент теории.

Уже в I главе, посвященной в основном *аффинорам* (линейным операторам) в *обычном трехмерном пространстве*, эта сторона дела обращает на себя внимание. Так, например, такой достаточно элементарный вопрос, как построение аффинора по трем парам соответствующих векторов, приобретает новый интерес, когда трактуется как своего рода «деление» одной тройки векторов на другую; отчетливо проведена идея алгебры аффиноров, и благодаря этому удается получить совершенно прозрачный вывод уравнения Гамильтона—Кэли; почти с самого начала читатель знакомится с индексным аппаратом, играющим затем столь важную роль в тензорном исчислении.

При этом автор дает весьма разносторонние и обстоятельные сведения о свойствах аффиноров, о их частных типах, связях с геометрией и т. д.

Вторая глава книги посвящена теме *дифференцирования функций точки* — скалярного поля $\phi(M)$ и векторного поля $\mathbf{p}(M)$. И здесь в основу положена широкая точка зрения: полный дифференциал скалярной функции рассматривается как скалярная линейная функция от вектора бесконечно малого смещения, что естественно приводит к вектору градиенту в качестве производной скалярного поля, и столь же естественное рассмотрение полного дифференциала векторной функции приводит к некоторому аффинору $\frac{d\mathbf{p}}{dr}$ в качестве производной векторного поля. Лишь затем рассматриваются дивергенция и ротор вектор-

ного поля — они появляются, как это в действительности и имеет место, лишь как частичные характеристики аффинора $\frac{dp}{dr}$. Столь же детально, как и в I главе, разворачивается фактический материал, связанный с этими понятиями. Интересны методы решения обратных задач: отыскание скалярного поля по градиенту, векторного поля по ротору или дивергенции (разумеется, с соответствующим произволом) и т. д. Однако рассмотрение сложных операций векторного анализа откладывается до III главы книги, где на помощь привлекается аппарат тензорного исчисления.

В III главе «Начала тензорного исчисления» автор переходит к криволинейным координатам, оставаясь однако по-прежнему в рамках трехмерного евклидова пространства. Тем не менее с достаточной общностью рассматриваются тензоры и операции над ними и даже общее понятие дифференциально-геометрического объекта. Нетензорный пример такого объекта читатель вскоре получает в лице объекта Христоффеля Γ_{ij}^k . Подробно изучается метрический тензор g_{ij} и выясняется его значение.

Идея криволинейных координат иллюстрируется на важнейших примерах.

Весьма большую роль в изложении играет местный базис, состоящий в каждой точке из векторов $\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ ($i = 1, 2, 3$), где u^1, u^2, u^3 — криволинейные координаты, а \mathbf{r} — радиус-вектор переменной точки M . Одновременно автор пользуется и взаимной тройкой векторов \mathbf{r}^i , что представляет значительные удобства для аппарата. В частности, это позволяет удобно записывать связанное с каждым тензором его *ядро* — так автор называет соответствующую мультилинейную векторную функцию (от столько векторных аргументов, сколько индексов у тензора).

Так как дифференцирование мультилинейной векторной функции определяется почти очевидным образом и в простейших случаях было осуществлено уже во II главе, то читатель весьма естественным путем подводится к вытекающему отсюда ковариантному дифференцированию тензоров. Большой заслугой автора является распространение ковариантного дифференцирования и вообще тензорного аппарата на тензоры с нескалярными (прежде всего векторными) компонентами. Простейшим из таких тензоров является ковариантный тензор \mathbf{r}_i и контравариантный \mathbf{r}^i с векторными компонентами.

На базе тензорного аппарата автор возвращается к материалу векторного анализа, причем теперь соответствующие операции удается записать в произвольных криволинейных координатах, и притом весьма компактным образом, например:

$$\operatorname{rot} \mathbf{p} = [\mathbf{r}^i p_{\alpha}], \quad \text{где } p_{\alpha} = \frac{\partial p}{\partial u^{\alpha}}.$$

Дальнейшие вычисления более сложных, составных выражений весьма облегчаются применением ковариантного дифференцирования. Основную роль играют здесь два обстоятельства: во-первых, ковариантное дифференцирование в применении к инвариантному выражению (скалярному или векторному, безразлично, например $\text{rot } \mathbf{p}$) дает то же, что и обыкновенное дифференцирование; ковариантное же дифференцирование тензоров $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}^i$ (это — тензоры с векторными компонентами) дает нуль. Таким образом, автор остроумно комбинирует принципы векторного и тензорного исчисления, так что наилучшим образом используются их преимущества: краткость векторных обозначений и геометричность связанных с ними образов сочетаются с инвариантным характером тензорных методов.

Далее специально рассматриваются особо важные для приложений ортогональные криволинейные координаты, и — это уже лишь в порядке краткого очерка — читатель подводится к идеям римановой геометрии.

Наконец, методы, развитые ранее для векторных полей $\mathbf{p}(M)$, переносятся на аффинорные поля $\Phi(M)$. Дифференцирование аффинора в криволинейных координатах

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

приводит к ковариантному тензору с аффинорными координатами. Для аффиноров инвариантным образом определяются дивергенция и ротор:

$$\text{div } \Phi = \Phi_\alpha \mathbf{r}^\alpha, \quad (\text{rot } \Phi) \mathbf{x} = \Phi_\alpha [\mathbf{r}^\alpha \mathbf{x}],$$

где \mathbf{x} — произвольный вектор. Решается ряд интересных обратных задач, например: найти поле симметричного аффинора, зная, что его дивергенция равна нулю, и т. п.

Как известно, в векторном анализе весьма важное место занимают *интегральные теоремы*. Нередко они трактуются весьма формально, просто как сведение интеграла по замкнутой поверхности к интегралу по области, ограниченной этой поверхностью, путем некоторой выкладки.

Изложение Я. С. Дубнова (глава IV) идет совсем другим путем. В нем глубоко вскрыта сущность рассматриваемого вопроса, именно, речь идет об аддитивных функциях области в пространстве (или на плоскости, а в некоторых случаях и на поверхности). Это значит, что каждой области D сопоставляется число $\mathcal{F}(D)$ (скалярная функция области) или вектор $\mathcal{F}(D)$ (векторная функция области) и т. д., причем когда из двух непересекающихся областей составляется третья, то значения функции складываются — это и означает аддитивность. При стягивании области к точке предел отношения значения функции к объему области (если этот предел существует) дает уже функцию точки $\mathcal{F}'(M)$ (скалярное поле, векторное поле и т. д.), которую мы рассматриваем как производную функции области. При

условии непрерывности этой функции можно показать, что $\mathfrak{F}(D)$ выражается через $\mathfrak{F}'(M)$ тройным интегралом по области D .

Эти совершенно общие результаты подводят естественную базу под интегральные теоремы векторного анализа. Действительно, интеграл, взятый по поверхности, ограничивающей область D , часто может рассматриваться как аддитивная функция области D ; таков, например, как нетрудно проверить, интеграл

$$\oint N\psi d\sigma,$$

где N — вектор внешней единичной нормали к поверхности, ψ — скалярное поле, $d\sigma$ — элемент площади поверхности. Следовательно, этот интеграл можно представить как тройной интеграл по области D от производной $\mathfrak{F}'(M)$, соответствующей аддитивной функции $\mathfrak{F}(D)$, и остается лишь вычислить эту производную. Вычисление приводит к $\text{grad} \psi$, и мы получаем интегральную теорему:

$$\oint N\psi d\sigma = \int \text{grad} \psi d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент объема области.

Таким же путем устанавливаются и другие интегральные теоремы; в случае теоремы Стокса этот же метод применяется для областей на поверхности.

Особое место в книге занимает Приложение, посвященное *векторно-дублетному исчислению в центроаффинной геометрии*.

Центроаффинная геометрия занимается свойствами фигур, инвариантными относительно однородных линейных преобразований координат, т. е. аффинных преобразований с фиксированной точкой O (началом). Сначала рассматривается центроаффинная геометрия на плоскости. Конечно, эта геометрия не допускает метрики, и с этим связано раздвоение понятия вектора на вектор (упорядоченная пара точек) и дублет (упорядоченная пара прямых). При этом первая точка вектора всегда совпадает с началом O , а первая прямая дублета — с бесконечно удаленной прямой. Разумеется, дублеты можно рассматривать и на евклидовой плоскости (точнее, на центроевклидовой с фиксированным началом O); однако там они теряют самостоятельное значение и при помощи метрики легко сводятся к векторам. Но при отсутствии метрики этого сделать нельзя, и дублеты на центроаффинной плоскости играют самостоятельную роль, и притом совершенно симметрическую (двойственную) по отношению к векторам. Действительно, принцип двойственности — симметричность в свойствах точек, с одной стороны, и прямых, с другой стороны, — имеющий место на проективной плоскости, сохраняется и при переходе к центроаффинной плоскости. В самом деле, этот переход сводится к выбору в проективной плоскости фиксированной прямой (бесконечно удаленной прямой) и не

принадлежащей ей фиксированной точки (начала O), т. е. симметрия свойств точек и прямых не нарушается.

Автор развивает векторно-дублетную алгебру на плоскости и в пространстве, а затем закладывает основы векторно-дублетного анализа, который в своеобразно раздвоенном виде воспроизводит картину обычного векторного анализа в евклидовом пространстве (так, например, градиентом скалярного поля является уже не вектор, а дублет и т. д.).

Заметим, что с тензорной точки зрения векторы служат геометрическим изображением одноконтравариантных тензоров, в то время как дублеты выполняют ту же роль для одноквариантных тензоров.

Выход за рамки евклидовой геометрии, осуществленный в Приложении, представляется нам весьма удачным и вполне отвечающим основной теме книги. Действительно, векторно-дублетное исчисление в центроаффинной геометрии есть самый непосредственный аналог — и в некотором смысле обобщение — векторного исчисления в евклидовом пространстве.

Глубина содержания в книге Я. С. Дубнова сочетается с большой доступностью изложения.

Стиль Я. С. Дубнова — это стиль неторопливой, но весьма содержательной и обдуманной беседы с читателем. Читатель никогда не ставится — мы уже не говорим перед ребусом, смысл которого трудно разгадать, — но даже и перед неожиданным новым понятием, неизвестно откуда появившимся и неизвестно для чего предназначенным. Нет, читатель всё время ощущает присутствие руководителя, мы готовы сказать даже, старшего друга, слышит его голос, своевременно разъясняющий цель и особенности предстоящего пути и предостерегающий от ошибок. Часто сопоставляются и оцениваются различные варианты взглядов на те или иные понятия, методы, обозначения.

И в то же время этот стиль непринужденной беседы не мешает строгой корректности изложения, которой книга Я. С. Дубнова выделяется из числа многих других руководств.

Проявлением заботы о читателе является также богатый подбор примеров и задач (492 задачи), во многих случаях оригинальных, составляющих немалую долю ценности книги.

Нам кажется, что эти достоинства на долгое время обеспечат курсу Я. С. Дубнова почетное место в нашей учебной литературе.

СОДЕРЖАНИЕ ¹⁾

А. М. Лопшиц. Яков Семенович Дубнов — ученый, педагог, человек . . .	3
--	---

I. ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ

Я. С. Дубнов. Содержание и методы преподавания элементов математического анализа и аналитической геометрии в средней школе . . .	17
Я. С. Дубнов. К истории постулата о параллельных линиях в связи с практикой современного преподавания . . .	57
П. К. Рашевский. Геометрия и ее аксиоматика . . .	73
Н. Бурбаки (Франция — США). Архитектура математики (<i>Перевод с французского Д. Н. Ленского</i>) . . .	99
А. А. Ляпунов. О фундаменте и стиле современной математики (По поводу статьи Н. Бурбаки) . . .	113

К вопросу о реформе преподавания математики в средней школе

От редакции . . .	117
Проект программ по математике для средней школы	118
В. Г. Ашкинуге, В. И. Левин, А. Д. Семушин. Некоторые замечания к проекту программы по математике для средней школы . . .	127

II. НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

Э. Э. Балаш. Об одном разложении в ряд логарифмической функции . .	133
В. А. Залгаллер. Замечания о задаче Радо . . .	141
Краткие сообщения:	
1. В. И. Левин. Об одном функциональном уравнении . . .	149
2. З. А. Скопец. Элементарное доказательство одной теоремы П. Эрдеша	151
3. Э. Э. Шноль. Замечания к работе Э. Э. Балаша . . .	152

III. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ

(Опыт преподавания и педагогический эксперимент)

И. М. Гельфанд. О формуле преобразования Фурье . . .	155
Г. Б. Гуревич. Измерение площадей многоугольников в евклидовой геометрии . . .	161
В. П. Паламонов. О двух геометрических задачах на максимум . . .	179

¹⁾ Материалы, помещенные на стр. 56—72, 116, 160—178, 200, 228, 240, в содержание не включены.

З. А. Скопец. Об одной паре специальных тетраэдров	185
И. М. Яглом. Новый вывод площадей фигур параболической трапеции и параболического сегмента	193

Краткие сообщения:

1. Н. А. Андреев. Суммирование одинаковых степеней последовательности натуральных чисел	201
2. А. М. Лопиц. О распределительном свойстве умножений в векторной алгебре	202
3. А. К. Харадзе. Определитель-циркулянт как единый алгебраический аппарат для решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней	204
4. В. Н. Чернышенко. Об одном итерационном методе решения алгебраических уравнений	203

IV. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА

П. Я. Дорф. Десять лет работы секции средней школы Московского математического общества	209
Деятельность Я. С. Дубнова в секции средней школы (П. Я. Дорф.)	212
И. Н. Бронштейн. Всесоюзное совещание преподавателей математики высших учебных заведений СССР	215
В. В. Немыцкий. Международный математический конгресс в Эдинбурге (Впечатления участника)	223
П. Р. Халмош (США). Николай Бурбаки (Перевод с английского Ф. Л. Варпаховского и Г. А. Шестопал)	229

Новости математической науки:

1. Д. Блануша. Новая модель плоскости Лобачевского (А. С. Солодовников)	241
2. Н. В. Ефимов — Е. Гейнц. Исследования возможности вложения поверхностей отрицательной кривизны в трехмерное пространство (Н. В. Ефимов)	243
3. У. Е. Хик, Р. Хайман и др. Применение идей теории информации к определению времени психологических реакций (А. М. Яглом)	246

V. ЗАДАЧИ

Задачи	253
Решения задач	261

VI. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

Я. С. Дубнов. Два новых учебника алгебры	275
Н. В. Ефимов, П. К. Рашевский. Курс векторного исчисления	293
Я. С. Дубнова	293

**В СЛЕДУЮЩЕМ (ШЕСТОМ) ВЫПУСКЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОСВЕЩЕНИЯ»
БУДЕТ НАПЕЧАТАНО:**

ОБЗОРЫ, СТАТЬИ, ПЕРЕВОДЫ:

- Л. А. Люстерник. Теория и практика в современной математике.
- И. М. Яглом. Комплексные числа и их применение в геометрии.
- В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович. Очерк основных идей топологии. *(Окончание.)*
- Р. Л. Добрушин. Математические методы в лингвистике.
- Ю. М. Безбородов и В. Б. Орлов. Машина играет в шахматы.
- Дж. Г. Кемени (США). Математическое образование в США.

НАУЧНЫЕ И НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБЩЕНИЯ.

НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ХРОНИКА:

Работа секции средней школы Московского математического общества. — О тематике работы кружка по анализу в Гродненском педагогическом институте. — О подготовке учителей математики в Норвегии. — Новости математической науки.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Рецензии на советские и зарубежные книги по математике. — Выпуск математической литературы Физматгизом и ИЛом в 1960 году —

И ДРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

162